Факультет математики

Лаборатория математического образования

Москва, 2024

Анализ функций и построение графиков с использованием ИКТ

для анализа задач с параметрами

GEOGEBRA

СВОБОДНЫЙ РЕСУРС

Работает в браузере по адресу https://www.geogebra.org/

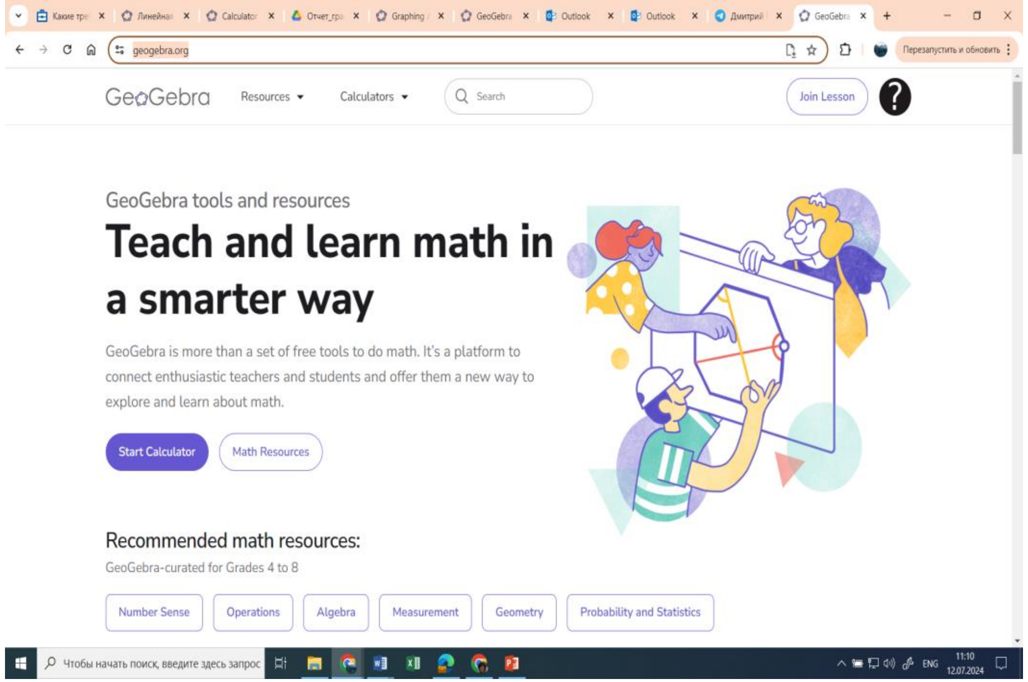
Предлагает бесплатные ресурсы для использования на уроках:
1) действия с числами (4-6 класс)

2) алгебра

3) измерения

4) Геометрия

5) Вероятность и статистика



Geogebra (Геометрия)

Все графики методического семинара построены в файле

https://www.geogebra.org/calculator/tu7axatp

ОТДЕЛЬНО файлы от Сгибнева А.И.:

1) СЛОВАРИК
2) ГОРЯЧИЕ КЛАВИШИ

Онлайн-версия: https://www.geogebra.org/classic/geometry. Версия для установки на компьютер: https://www.geogebra.org/download → GeoGebra Classic 6. русскоязычный видеокурс: https://youtu.be/ZpLI2802pxM

Монотонные функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

•Если функция *y=f(x)* является возрастающей (убывающей) на множестве D_f, то уравнение *f(x)=a*, где *a* некоторое число, имеет не более одного корня.

•Если одна из функций *f* или *g* является возрастающей на множестве $D_f \cap D_g$, а другая убывающей на этом множестве, то уравнение *f(x)=g(x)* имеет не более одного корня.

1) $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$

2) $x^3 + 1 = \sqrt{5-x}$

3) $\frac{9}{x} - 1 = 2\sqrt{x-2}$

Свойства суперпозиции двух функций.

Определение. Пусть даны функции u= f(x) и y=g(u) , причём, множество значений f(x) содержится в области определения g(u) , т.е. E_f является подмножеством D_g . Тогда, композицией (суперпозицией) функций f и g называется новая функция, которая является результатом последовательного выполнения отображений f и g. Записывается f°g или y=g(f(x))

Областью определения суперпозиции y=g(f(x)) является подмножество области определения внутренней функции f(x) такое, что множество значений f на этом подмножестве содержится в области определения внешней функции g .

С помощью суперпозиции постройте графики функций:

$$y = \sin(\log_2 x) \qquad y = lg(x^2 - 3x + 2) \qquad y = \sqrt{2}^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$

Теорема. Если функция f является возрастающей, то уравнение $\mathrm{f}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x})\big) = \mathrm{x}$ равносильно уравнению $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

$$\sqrt{7+\sqrt{7+x}} = x \Leftrightarrow \sqrt{7+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7 + x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

так как $x = \frac{1-\sqrt{29}}{2} < 0$

Специальные функции . Целая часть числа. Дробная часть числа.

Знак числа. Функция Дирихле.

1) Любое действительное число представляется единственным образом в виде суммы целой (антье) и дробной (мантисса) частей. $x = [x] + \{x\}$

$$\left[-\frac{2}{3}\right] = -1, \left\{-\frac{2}{3}\right\} = 1/3$$

2) Функция Сигнум (знак) – кусочно-постоянная функция действительного аргумента, не явл элементарной $sign\ (x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

3) Функция Дирихле - $\mathrm{dir}\ (x)\colon\ \mathbb{R} \to \{0; 1\}$, такое что $dir\ (x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

https://www.geogebra.org/m/hb8zkb7s

$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
имеет единственное

Задача 1 . При каких значениях параметра *а* функция $f(x)=\frac{2}{x^2+4x+5}$ является убывающей на промежутке [3a; a+3] ?

Задача 2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

Задача 3. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x+3|y|+5=0 \\ (x-a)^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет ровно три решения?

Задача 4. При каких а система имеет единственное $\begin{cases} 3*2^{|x|}+5*|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ решение?

$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$
имеет единственное

ОТВЕТ Задача 1 . При $-\frac{2}{3} \le a < \frac{3}{2}$ функция убывает.

ОТВЕТ Задача 2. При $\mathrm{a} = 0$ или $a = 2sin1$ уравнение имеет единственное решение.

ОТВЕТ Задача 3. При $\mathrm{a} \succ -3$ нет решений; при $\mathrm{a} = -3$ единственное решение (-5;0); при $-7 < \mathrm{a} < -3$ два решения; при $\mathrm{a} = -7$ три решения; при $\mathrm{a} < -7$ четыре решения.

ОТВЕТ Задача 4. При $\mathrm{a} < \frac{4}{3}$ нет решений; при $\mathrm{a} = \frac{4}{3}$ единственное решение (0;1); при $\frac{4}{3} < \mathrm{a} < \frac{10}{3}$ два решения; при $\mathrm{a} = \frac{10}{3}$ три решения (1;0), (-1;0), (0;-1); при $\frac{10}{3} < \mathrm{a} <\approx 4.1$ четыре решения; при $\mathrm{a} \approx 4.1$ вновь два решения (там окружность касается графика первого уравнения); при $\mathrm{a} >\approx 4.1$ нет решений.

Найти значение «≈ 4.1» мне не удалось аналитически ;-) Значит, в этой задаче задаем вопросы только по 1-3 решения.

ВЫСШАЯ • ШКОЛА • ЭКОНОМИКИ