

Листочки к курсу по теории вероятностей для учителей математики

Заикин Евгений Юрьевич

22 июля 2024 г.

Содержание

1	Независимые и зависимые события	2
2	Условная вероятность и теорема Байеса	5
3	Случайные величины и их числовые характеристики	7

1 Независимые и зависимые события

Независимые события

Задача 1. Шахматист А выигрывает партию против шахматиста Б с вероятностью 0.7, если играет белыми и с вероятностью 0.55, если играет чёрными. А и Б сыграли две партии, поменявшись на второй партии цветами. Найдите вероятность того, что А выиграл обе партии.

Задача 2. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Задача 3. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо).

Задача 4. Во дворе играют 18 детей: 10 мальчиков и 8 девочек. Дети играют в футбол и в классики. В футбол играют 6 мальчиков и 2 девочки, в классики остальные ребята. Выберем случайным образом ребенка среди играющих. Зависимы ли события *"выбранный ребенок играет в футбол"* и *"выбранный ребенок — мальчик"*?

Задача 5. События *A* и *B* несовместны, причем их вероятности не равны нулю. Доказать, что они зависимы.

Задача 6. Для отбора на соревнования пловец Вова должен провести три заплыва и обогнать соперника хотя бы два раза подряд. Соревноваться Вове придётся с Митей и Мишей, но Вова может выбрать порядок заплывов: Митя, Миша, Митя или Миша, Митя, Миша. Вова знает, что для него вероятность прийти вторым в заплыве с Митей составляет 0.3, а с Мишей – 0.4. Какой порядок следует выбрать Вове, чтобы с большей вероятностью пройти на соревнования?

Задача 7 (Краш-тест). Вероятность отказа двигателя самолета во время полета составляет p . Самолет сохраняет способность летать, если у него работает хотя бы половина двигателей. На каком самолете безопаснее летать: двухмоторном или четырехмоторном?

Задача 8. В круг радиуса 50 наудачу вбрасываются 3 точки. С какой вероятностью расстояние от центра до ближайшей точки будет не больше 10?

Задача 9 (Время пострелять - I). Стрелок стреляет в тире по мишени. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле одна и та же. Стрелок попал в мишень восемь раз из десяти выстрелов. Какова вероятность того, что среди первых пяти выстрелов было ровно четыре удачных?

Задача 10 (Время пострелять - II). На тренировке снайперу предстоит поразить 10 мишеней. Вероятность попадания каждым конкретным выстрелом одинакова и равна 0.8, при этом на каждую мишень, в случае первого промаха, снайперу даётся второй шанс. Найдите вероятность того, что снайпер поразит ровно 8 мишеней.

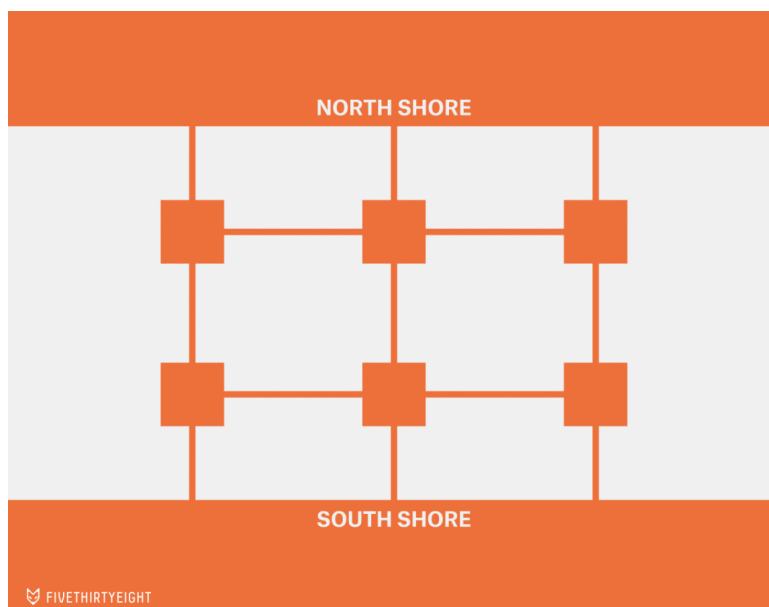
Задача 11. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит менее двух разбитых бутылок.

Задача 12 (Алло, пицца?). Среднее число поступающих за 2 часа заказов в компанию по доставке пиццы равно 240. Какова вероятность того, что в течение минуты поступит от 2 до 3 заказов?

Задача 13 (Олимпиада по ТВиМС). В случайном опыте ровно 7 элементарных событий, и все они равновозможны. Пусть Ω' – множество всех событий этого опыта, кроме невозможного (пустого) события. Сколько в множестве Ω' существует пар различных независимых событий?

Задача 14 (Апокалипсис на берегу). Вдоль южного берега бескрайнего моря цепочкой раскинулся архипелаг из бесконечного количества островов. Острова соединены бесконечной цепочкой мостов, и каждый остров соединён мостом с берегом. В случае сильного землетрясения каждый мост независимо от других с вероятностью $p = 0,5$ разрушается. Какова вероятность того, что после сильного землетрясения с первого острова можно будет перебраться по сохранившимся мостам на берег?

Задача 15 (Наводнение). На некоторой реке имеется 6 островов, соединенных между собой системой мостов. Во время летнего наводнения часть мостов была разрушена. При этом каждый мост разрушается с вероятностью 0.5, независимо от других мостов. Какова вероятность того, что после наводнения можно будет перейти с одного берега на другой, используя не разрушенные мосты?



Зависимые события

Задача 16. Класс из 17 человек случайным образом делят на две группы по 9 и 8 человек соответственно. Найдите вероятность того, что ученицы этого класса - Лада и Варя - окажутся в одной группе.

Задача 17. Вы выучили 10 билетов из 25 и можете выбрать место в очереди на сдачу экзамена. Каждый экзаменуемый получает случайный билет из 25, билеты не возвращаются. Какое место в очереди вам занять выгоднее: первое или второе, чтобы с большей вероятностью получить известный вам билет?

Задача 18. У некоторого преподавателя есть 12 красных и 12 оранжевых ручек. Он раскладывает ручки в карманы по 12 в каждый таким образом, чтобы при случайном выборе кармана и вытаскивании из него ручки наугад, вероятность получить оранжевую ручку была максимально возможной. Какую вероятность вытащить оранжевую ручку преподавателю удастся получить?

Задача 19. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары; проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определён жребием. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Женя и Дима. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?