Тема 3

Случайные величины и их числовые характеристики

3.1 Теоретический материал

Определение 3.1.1. *Случайной величиной* называется функция ξ, заданная на множестве Ω со значениями в $\mathbb{R}$.

Заметим, что случайные величины могут быть дискретными или непрерывными. Примерами случайной величины могут являться:

- Сумма очков, выпавшая на двух игральных кубиках;
- Рост случайного человека из выборки;
- Число букв в имени случайного ученика из первой группы 10-го класса;
- Количество перегоревших в новогодней гирлянде лампочек.

Упражнение: Приведите пример случайной величины.

Определение 3.1.2. Законом *распределения* случайной величины ξ будем называть некоторое правило, позволяющее однозначно определить значение вероятности по значению случайной величены. Таковыми могут являться: таблица распределения, функция распределения F_ξ.

Пусть ξ - результат бросания одного игрального кубика. Тогда распределение ξ задается таблицей:

ξ	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\xi)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Заметим, что то же распредление удобнее указать следующим образом:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Определение 3.1.3. *Индикатором* называется с.в., имеющая следующее распределение:

$$I(A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mathbb{P}(A) & \mathbb{P}(A) \end{pmatrix}$$

Ниже даны распределения индикаторов для событий

$A = \{$*на игральном кубике выпало больше четырех очков*$\}$;
$B = \{$*из коробки достали красный мячик, если в ней n красных и m синих мячиков*$\}$.

$$I(A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad I(B) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m}{n+m} & \frac{n}{n+m} \end{pmatrix}$$

Определение 3.1.4. *Математическим ожиданием* $\mathbb{E}(\xi)$ случайной величины ξ, прирнимающей n значений с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ называется сумма, если она существует:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot p_i.$$

Теорема 3.1.1. Математическое ожидание линейно: $\mathbb{E}(a\xi + b\eta + c) = a\mathbb{E}(\xi) + b\mathbb{E}(\eta) + c$.

Определение 3.1.5. Дисперсией с.в. называется числовая характеристика

$$\mathbb{D}(\xi) = Var(\xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2.$$

Теорема 3.1.2. Дисперсию с.в. можно вычислить по формуле

$$\mathbb{D}(\xi) = Var(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$

Определение 3.1.6. Стандартным отклонением с.в. ξ называется величина $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}(\xi)}$.

3.2 Примеры задач и решений

Задача 1 (Ловелас)**.** У некоторого ловеласа n знакомых девушек (их всех зовут поразному). Он пишет им n любовных писем, каждой своё, но, так как писал он всю ночь, невыспавшийся раскладывает их в подписаные конверты случайным образом, не сверяя имена. Величина ξ обозначает количество девушек, получивших письма, написанные непосредственно для них. Найдите:

a) $\mathbb{E}(\xi)$;

b) $\mathbb{D}(\xi)$.

Решение: a) Занумеруем знакомых девушек ловеласа номерами от 1 до n. Разобъём с.в. ξ - количество девушек, получивших любовное письмо, адресованное им лично, на сумму

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_i,$$

где $\mathbb{I}_i$ - индикатор события *i-я по счёту девушка получит письмо, адресованное её лично.* Заметим, что $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathbb{I}_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{n-1}{n} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу линейности математического ожидания имеем

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{I}_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

b) Для вычисления дисперсии ξ воспользуемся удобной формулой:

$$\mathbb{D}(\xi) = \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(\xi\right)\right)^2.$$

Нетрудно заметить, что из пункта a) получаем $\left(\mathbb{E}\left(\xi\right)\right)^2 = 1$. Осталось вычислить

$$\mathbb{E}\left(\xi^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_i\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_i^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{i>j=1}^{n} \mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\right).$$

Известно, что $\mathbb{E}(\mathbb{I}^2) = \mathbb{E}(\mathbb{I})$, то есть $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{I}_i^2\right) = 1$. Произведение индикаторов $\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j$ при $i \neq j$ отражает событие i-я и j-я девушки получили свои валентинки, вероятность чего составляет $\mathbb{P}\left(\mathbb{I}_i = \mathbb{I}_j = 1\right) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}$, при этом слагаемых в сумме $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{i>j=1}^{n} \mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\right)$ столько же, сколько возможно пар девушек: $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, откуда $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{i>j=1}^{n} \mathbb{I}_i\mathbb{I}_j\right) = \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{2}$. Окончательно:

$$\mathbb{D}(\xi) = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1.$$

■

Задача 2 (Спасём яков!)**.** Чтобы поймать двух диких яков для размножения, в Гималаи послали экспедицию. Предположим, что яки бродят по горам в одиночестве и в случайных направлениях. Вероятность $p \in (0,1)$ того, что пойманный як – самец, не зависит от предыдущих результатов. Пусть ξ – число яков, которых необходимо поймать для того, чтобы получить пару. Вычислите $\mathbb{E}(\xi)$ при $p = 0{,}69$.

Решение: Очевидно, что $\mathbb{P}(\xi = n) = (1-p)^{n-1}p + p^{n-1}(1-p)$, ведь мы ведём испытания до первого успеха. Тогда математическое ожидание с.в. ξ вычисляется как:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = i)\cdot i = q\sum_{i=2}^{\infty} ip^{i-1} + p\sum_{i=2}^{\infty} i(1-p)^{i-1}.$$

Воспользовавшись формулой бесконечно убывающией прогрессии по аналогии с тем, как выводится математиеское ожидание геометрически распредлённой с.в., получаем:

$$\mathbb{E}(\xi) = pq\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-(1-p)} + \frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-(1-p))^2}\right) = 1 + \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

При условии $p = 0.69$ имеем $\mathbb{E}(\xi) \approx 3.67508$. ■

3.3 Домашнее задание

Задача 1 (Лотерея - I)**.** Билет лотереи "Кто успел, тот и съел" стоит 150 рублей. В каждом сезоне разыгрывается 10000 билетов, среди которых 1 билет содержит суперприз в 100000 рублей, 15 билетов — приз в 10000 рублей, 50 билетов — приз в 1000 рублей и 1000 билетов — приз в 100 рублей, остальные проигрышные. Пусть ξ - с.в., равная прибыли от участия в этой лотерее. Найдите закон распределения ξ и определите, выгодна ли она для игрока.

Задача 2 (Галя, отмена!)**.** В ящике $b > 3$ бананов и $a > 3$ апельсинов. Продавщица Галя делает выкладку фруктов, доставая случайные три фрукта. Найдите распределение индикатора события $A = \{$*Галя достала больше апельсинов, чем бананов.*$\}$ В качестве ответа укажите математическое ожидание этого индикатора при $a = 100500$ и $b = 123456$, округлённое до тысячных.

Задача 3 (Футбольчик)**.** Владик играет в футбольной команде, в которой он четвёртый по росту. Перед игрой команда из 11 человек построилась для приветствия в случайном порядке. Найдите:

a) Распределение индикатора события "*Владик стоит первым в колонне*";

b) Распеределение с.в. ξ — числа игроков в колонне перед Владиком;

c) Распределение индикатора события "*все игроки выше Владика стоят в колонне за ним*";

d) Распределение с.в. η — числа игроков выше Владика в колонне позади него.

Задача 4 (Подвиги Геракла – II)**.** Вторым подвигом Геракла была победа над Лернейской гидрой – чудовищем, которое, теряя головы, отращивало новые. Будем считать, что меч Геракла достаточно остёр для того, чтобы отрубить голову Гидры, и силы у него, как у героя легенд, не заканчиваются никогда. При этом, Гидра, имеющая изначально k голов, теряя одну голову, отращивает три новые с вероятностью p и не отращивает ни одной с вероятностью $1 - p$.

a) При каком значении p можно ожидать победы Геракла над Гидрой?

b) С каким числом отрубленных голов Гидры останется Геракл при $p = 0.1$ и $k = 7$?

c) Ответьте на вопросы (a-b), если Гидра продолжит отращивать головы только с вероятностью p, но число голов, которые отращивает Гидра за раз есть случайная величина, равновероятно принимающая значения из множества $\{1, 2, 3\}$.

Тема 4

Пять важных распределений

4.1 Распределение Бернулли

Определение 4.1.1. С.В. ξ имеет распределение Бернулли, если она суть индикатор с вероятностью успеха p.

Пишут:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \sim Ber(p).$$

Задача 1. Вычислите математическое ожидание с.в., распределенной по Бернулли

Задача 2. Вычислите дисперсию с.в., распределенной по Бернулли

4.2 Биномиальное распределение

Определение 4.2.1. С.в. $\xi = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$ распределена биномиально, если она составлена из суммы n распределенных по Бернулли с.в. η_i с вероятностью успеха p.

Пишут:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 & n \\ C_n^0 p^0 (1-p)^n & C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1} & \ldots & C_n^{n-1} p^{n-1} (1-p)^1 & C_n^n p^n (1-p)^0 \end{pmatrix} \sim B(p,n).$$

Задача 1. Вычислите математическое ожидание с.в., распределенной биномиально

Задача 2. Вычислите дисперсию с.в., распределенной биномиально

4.3 Геометрическое распределение

Определение 4.3.1. С.в. ξ имеет геометрическое распределение, если моделирует испытания до первого успеха с вероятностью успеха p.

Пишут:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p & qp & \ldots & q^{n-1}p & \ldots \end{pmatrix} \sim Geom(p).$$

Задача 1. Вычислите математическое ожидание с.в., имеющей геометрическое распределение.

Решение. Пусть

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p & qp & \ldots & q^{n-1}p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbb{E}(\xi) = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} + \ldots$

Способ 1. Преобразование.

$$\mathbb{E}(\xi) = p+2pq+\ldots+npq^{n-1}+\ldots = \big(p + pq + \ldots + pq^{n-1} + \ldots\big)+\big(pq + \ldots + (n-1)pq^{n-1} + \ldots\big)$$

Воспользуемся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$p + pq + \ldots + pq^{n-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1.$$

При этом во второй скобке стоит сумма

$$pq + \ldots + (n-1)pq^{n-1} + \ldots = q\left(p + \ldots + (n-1)pq^{n-2} + \ldots\right) = q\mathbb{E}(\xi),$$

откуда

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 + q\mathbb{E}(\xi) \Longleftrightarrow \mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}.$$

Способ 2. Дифференцирование.

Заметим, что

$$\mathbb{E}(\xi) = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} + \ldots = p\left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots\right)'_q,$$

то есть производная по q, при этом сумма ряда под знаком производной равна

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q},$$

откуда

$$\mathbb{E}(\xi) = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

■

Ответ: $\frac{1}{p}$.

Задача 2. Вычислите дисперсию с.в., имеющей геометрическое распределение

4.4 Гипергеометрическое распределение

Определение 4.4.1. С.в. ξ имеет гипергеометрическое распределение, если моделирует количество удачных выборок из n элементов без возвращения из конечной совокупности объёма N с K помеченными объектами. Пишут $\xi \sim HG(K, N, n)$.

Задача 1. Найдите распределение с.в. ξ, имющей гипергеометрическое распределение.

Задача 2. Вычислите математическое ожидание с.в., имющей гипергеометрическое распределение.

Задача 3. Вычислите дисперсию с.в., имющей гипергеометрическое распределение.

4.5 Распределение Паскаля

Определение 4.5.1. С.в. ξ имеет распределение Паскаля, если моделирует испытания до первых k успехов с вероятностью успеха p. Пишут $\xi \sim NB(p{,}k)$.

Задача 1. Найдите распределение с.в. ξ, имеющей распределение Паскаля.

Задача 2. Вычислите математическое ожидание с.в., имеющей распределение Паскаля.

Задача 3. Вычислите дисперсию с.в., имеющей имеющей распределение Паскаля.

Задача 4. Пусть $\xi \sim NB(p,k)$ и $\eta \sim NB(p,m)$ независимы. Докажите, что $(\xi+\eta) \sim NB(p,k+m)$.

4.6 Задачи для тренировки

Задача 1. Вероятность того, что ученик первой группы получил отметку "отлично" по курсу теории вероятностей и математической статистики составляет 0.2 для кажддого ученика независимо от остальных. Какова вероятность того, что из четырёх человек, которых случайно выберет преподаватель для промежуточного опроса ровно трое не получат отметку "отлично"?

Задача 2. Известно, что с.в. $\xi \sim B(\frac{1}{3}, 9)$. Найдите $\mathbb{E}(\xi^2)$.

Задача 3 (Деньрожденная)**.** На день рождения пришли 14 гостей. Известно, что каждый 5-й гость бессовестный и приходит без подарка. Пусть ξ – число бессовестных гостей на празднике. Найти закон распределения случайной величины ξ, вероятностные характеристики ξ и вероятности следующих событий: пришло 8 бессовестных гостей; пришло не меньше 11 гостей с подарками. Считать, что гость приносит или не приносит подарок независимо от остальных.

а) $\mathbb{P}(\xi = 8)$

б) $\mathbb{P}(\xi \leq 11)$

в) $\mathbb{E}(\xi)$

г) $\mathbb{D}(\xi)$

Задача 4 (Едем в Путилково)**.** Студент бесконечно долго едет в Путилково, стоя в переполненном автобусе. Он пытается занять свободное место. Будем считать, что эти попытки не зависят друг от друга, и вероятность успеть к свободному месту постоянна и равна 0.05. Пусть с. в. ξ – номер удавшейся попытки. Найдите:

а) $\mathbb{P}(\xi = 7)$

б) $\mathbb{P}(\xi \leq 3)$

в) $\mathbb{E}(\xi)$

г) $\mathbb{D}(\xi)$

Задача 5 (Испытание терпения)**.** Ваня решил потянуть со сдачей письменного домашнего задания по геометрии. В каждый день после дедлайна независимо от других дней терпение преподавателя может лопнуть и с вероятностью $p = 0.2$ он может поставить Ване за работу 2. Оцените на сколько дней Ваня мог бы задержать сдачу работы, не особо опасаясь за появление двойки.

Задача 6 (Задача коллекционера)**.** В киндер-сюрпризах попадаются фигурки из коллекции бегемотиков, насчитывающей n различных фигурок. Сколько потребуется купить киндер-сюрпризов, чтобы собрать полную коллекцию?

Задача 7 (Оценка максимального правдоподобия)**.** Сколько машин фирмы "Зеленоглазое такси" работает в городе, если в последовательности случайных машин первый раз машина повторилась при девятой поездке?

Задача 8 ("Ну не то, чтобы совсем не попал…")**.** Храбрый Пятачок спешит с ружьём на помощь зависшему исследователю Винни-Пуху . При каждом выстреле Пятачок попадает в шарик с вероятностью $p = 0.7$ независимо от предыдущих выстрелов. Стреляет Пятачок до первого попадания. Пусть ξ — это количество выстрелов, η — количество промахов по шарику[1].

a) Найдите $\mathbb{P}(\xi = k)$;

b) Терпения Винни-Пуха хватает на 5 промахов Пятачка. Какова вероятность того, что терпения Винни-Пуха не хватит?

c) Найдите $\mathbb{P}(\eta = k)$;

d) Вычислите $\mathbb{E}(\xi)$ и $\mathbb{E}(\eta)$. Существует ли между ними зависимость?

e) Вычислите $\mathbb{D}(\xi)$ и $\mathbb{D}(\eta)$. Существует ли между ними зависимость?

Задача 9. На тренировке снайпер должен поразить 12 мишеней. Известно, что в каждую из них он стреляет до тех пор, пока не поразит её, а кроме того при каждом выстреле, независимо от других, вероятность попадания равна 0.8. Сколько патронов в среднем тратит снайпер на тренировке?

Задача 10. Тест по ТВиМС на допуск к сессии в первой группе состоит из 5 вопросов с четырьмя вариантами ответа на каждый. Вовочка к тесту не готовился, поэтому в каждом из вопросов выбирает случайный ответ наугад (равновероятно). Допуск даётся только если тест выполнен на 100%.

a) Какова вероятность события *"Вовочка получил допуск, написав не больше двух тестов"?*

b) Найдите ожидаемое число тестов, которые нужно написать Вовочке, чтобы получить допуск;

c) Ответьте на вопросы a) и b), если для получения допуска достаточно верно ответить на 4 из 5 вопросов теста.

Задача 11. Известно, что, в среднем, нужно 5 попыток, чтобы узнать: будет ли самостоятельная работа на уроке. Зная, что число с.в. попыток до ответа подчиняется геометрическому закону распределения, найдите вероятность того, что для того, чтобы узнать, будет ли самостоятельная, потребуется ровно 3 попытки.

Задача 12. В стаде из 33 голов скота 15 козлов и 18 коз. Случайным образом выбирается "подстадо" из 5 голов. Найдите вероятность того, что:

1. Ровно 2 козла;
2. Не меньше 4 коз;
3. Число козлов больше числа коз.

[1] или попаданий по исследователю Винни-Пуху

Задача 13. Варя и Валя собирают наклейки из творожных сырков. Всего в коллекции 18 разных наклеек. Известно, что сейчас у Вари 12 разных наклеек, а у Вали – только 10 разных наклеек. Какова вероятность того, что если Варя и Валя объединят свои коллекции, то у них вместе получится полная коллекция?

Задача 14. В коробке украшений для новогодней ёлки лежат 5 шариков и 3 фигурки деда Мороза.

a) Мальчик Петя вешает на ёлку три игрушки из этой коробки. Найдите вероятность того, что ровно одна из повешенных им игрушек - фигурка деда Мороза;

b) После Пети, доставшего из коробки одну фигурку деда Мороза и два шарика, к коробке подошёл кот Мурзик, который уронил коробку с украшениями, и два из них разбились. Найдите вероятность того, что разбились две фигурки деда Мороза.

Задача 15 (Пристегните ремни)**.** Два друга решили полететь в Питер, каждый покупает билет на один и тот же рейс Airbus A320. Схема мест воздушного судна представлена на Рис.4.1 ниже. Если известно, что предварительной брони мест нет, а места между всеми пассажирами распределяются равновероятно, найдите вероятность того, что друзья будут сидеть:

a) в одном ряду;

b) на соседних креслах одного ряда;

c) на местах Space+ (указаны знаком $\longleftrightarrow$);

d) на местах у прохода (D или C);

e) через одного в одном ряду.

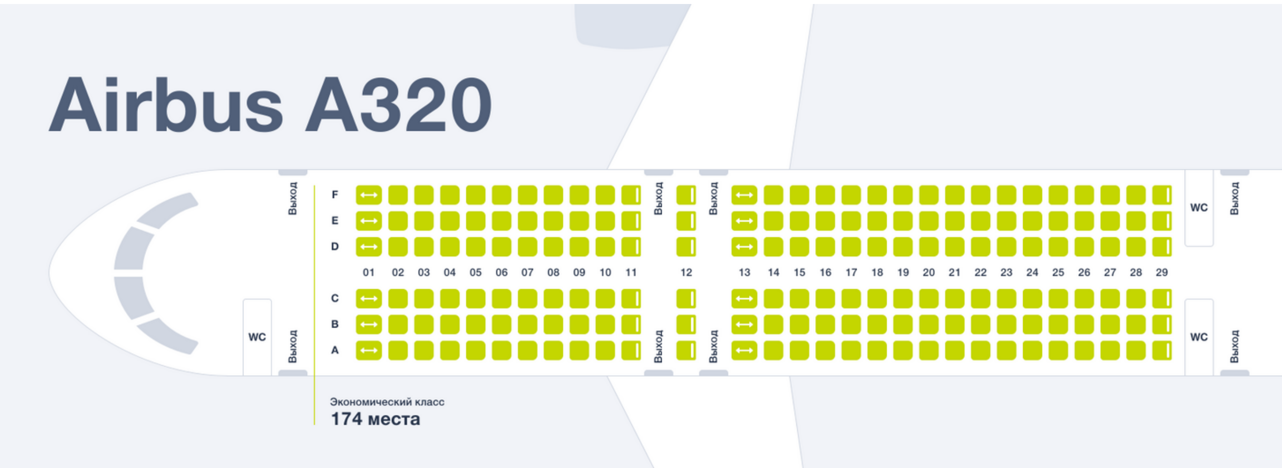


Рис. 4.1: Схема рассадки в A320

Задача 16 (Мат-Бои)**.** На матбои записались n девятиклассников, из которых k первогруппников. Случайным образом их разделили на m равных по численности команд. Какова вероятность того, что в первой команде будет r учеников первой группы, если:

a) $n = 16$, $k = 5$, $m = 2$, $r = 4$;

b) $n = 21$, $k = 5$, $m = 3$, $r = 4$.

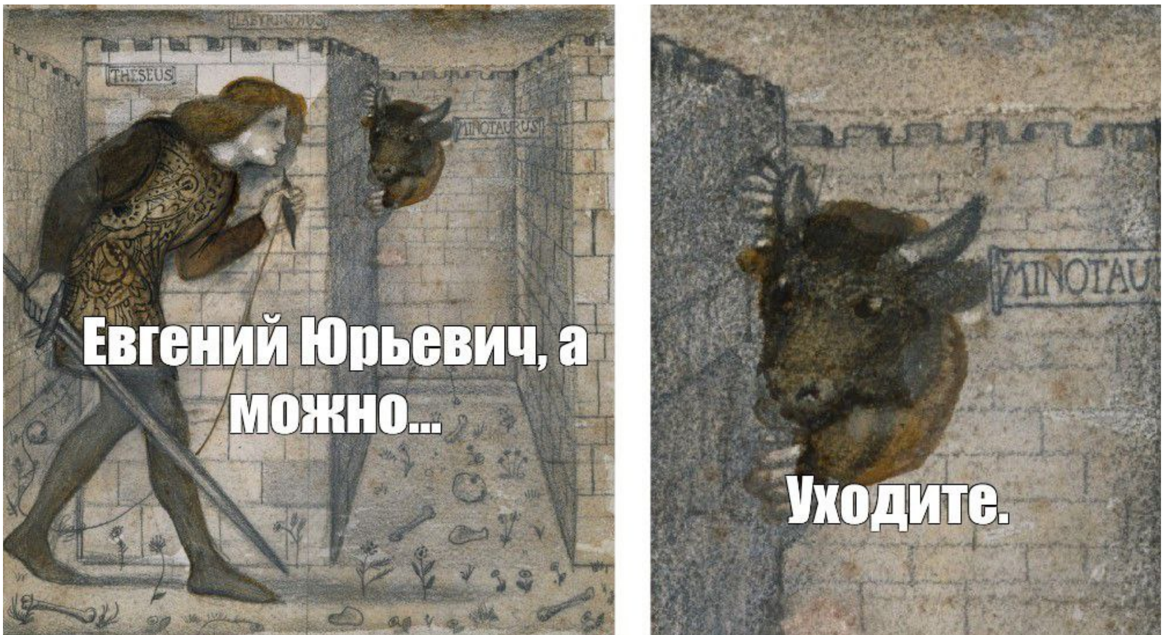
Задача 17 (Что такое счастье?)**.** Назовём Владика счастливым, если он встретил в школе Саню. Так как они оба спортсмены, так ещё иногда и отлынивают от посещения школы по иным причинам, можно считать, что в любой учебный день независимо от других вероятность их встречи равна $\frac{4}{13}$, в выходные школа закрыта. Сегодня четверг, 16.11. Найдите математическое ожидание даты, к которой Владик станет счастливым четыре раза, если каникулы отменили.

Задача 18 (Крутите барабан! - II)**.** В пяти шестизарядных револьверах по одному патрону. Стрелок A в тире берёт первый револьвер, крутит барабан и нажимает на спусковой крючок. Если не происходит ничего, он вновь случайным образом крутит барабан и повторяет попытку. Как только произошёл выстрел, A мгновенно хватает следующий револьвер и повторяет описанную схему до последнего выстрела. Найдите вероятность того, что последний, пятый выстрел, произойдёт на десятом нажатии на спусковой крючок. Сколько, в среднем, раз придётся нажать на спуск курка стрелку до последнего выстрела?

Задача 19 (Пациент скорее жив, чем мёртв)**.** Для медицинского исследования последствий от COVID-19 набирается группа из 20 испытуемых. Каждый человек, с которым исследователь проводит собеседование, имеет 60%-ный шанс на участие в исследовании. Какова вероятность того, что исследователю придется опросить более 40 человек?

Задача 20 (Опоздун)**.** Вероятность того, что Даня опоздает на урок геометрии составляет 0.8. Какова вероятность того, что Даня придёт вовремя на урок пятый раз на десятый по счёту урок? На сколько из 36 уроков триместра, в среднем, опоздает Даня?

Задача 21 (Ланистеры всегда платят свои долги)**.** За десять рабочих дней до конца триместра Никита решил появиться в школе. У него есть долг в пять работ, которые необходимо написать у ЕЮ для получения аттестации. В каждый из дней, независимо от остальных, Никита приходит написать ровно одну работу с вероятностью $\dfrac{1}{3}$ или не приходит с вероятностью $\dfrac{2}{3}$. Найдите вероятность того, что Никита успеет написать все работы не раньше чем за 8, но не позже, чем за 10 дней.



4.7 Домашнее задание

4.7.1 Бернулли и Биномиальное

Задача 1 (Эпидемия гриппа)**.** Осенью в Москве наблюдается доля заболевших гриппом, равная 24% населения города.

a) Найдите вероятность того, что среди случайно выбранных пяти учеников некоторой группы не менее двух болеют гриипом;

b) Найдите ожидаемое число больных гриппом в группе из шестнадцати человек.

Задача 2 (Снайпер)**.** На тренировке снайперу предстоит поразить 10 мишеней. Вероятность попадания каждым конкретным выстрелом одинакова и равна 0.8, при этом на каждую мишень, в случае первого промаха, снайперу даётся второй шанс. Пусть ξ - с.в., равная числу поражённых снайпером мишеней. Найдите:

a) $\mathbb{P}(\xi = 8)$; b) $\mathbb{E}(\xi)$; c) $\mathbb{D}(\xi)$.

Задача 3 (Зачем нужна дисперсия)**.** Пусть $\xi \sim B(0.3; 10)$. Вычислите $\mathbb{E}(\xi^2)$.

Hint: В следующей задаче удобнее использовать программу или таблицу Exele для вычисления соответствующих вероятностей.

Задача 4 (Овербукинг)**.** Явление, при котором на самолёт продаётся больше билетов, чем фактическое количество мест в этом самолёте, носит название овербукинг. Авиакомпания, имеющая исчерпывающую статистику по вылетам вычислила, что для каждого из пассажиров вероятность спонтанного оттказа от полёта одинакова и равна 0.1. Какое наибольшее количество билетов следует продать, чтобы на рейс явилось не больше 200 пассажиров с вероятностью 0,99 или выше?

Задача 5 (Подвиги Геракла - III)**.** Третьим подвигом Геракла было истребление стимфалийских птиц. Меткость у Геракла нечеловеческая, так что можно считать, что вероятность попадания каждой стрелой не зависит от иных выстрелов и равна 0.9. Птицы испугаются и покинут Грецию только если Геракл сразит хотя бы половину из них. Пусть стрел у Геракла s, а птиц кружит над его головой k.

a) Сколько стрел нужно запасти Гераклу, если он опирается на ожидаемое число подбитых птиц, а Стимфалийских птиц 333?

b) Пусть $k = 2s$, то есть стрел у Геракла ровно вдвое меньше, чем число Стимфалийских птиц. Найдите вероятность того, что Гераклу не удастся выполнить третий подвиг. При каком значении k эта вероятность больше $\dfrac{1}{3}$?

c) Найдите дисперсию индикатора события $A = \{\textit{Геракл победил}\}$ при $k = 8$, $s = 5$.

4.7.2 Геометрическое

Задача 1. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Задача 2. Чтобы сдать тест по ТВиМС нужно набрать хотя бы 80%. Ученик N не готовился к тесту, поэтому выбирает ответы наугад в каждом из вопросов. Всего в тесте 10 вопросов.

a) Какова вероятность сдать тест с первой попытки?

b) Найдите вероятность тогго, что чтобы сдать тест, ученику N потребуется не более двух попыток.

c) Найдите ожидаемое число тестов, которое нужно будет пройти ученику N, чтобы сдать тест.

Задача 3 (Крутите барабан! - I)**.** А и Б стреляют в тире, но у них есть только один шестизарядный револьвер с одним патроном. Поэтому они договорились по очереди случайным образом крутить барабан и стрелять. Начинает А.

a) Найдите вероятность того, что выстрел произойдет, когда револьвер будет у А.

b) Найдите среднее число спуска курка до выстрела.

Задача 4 (Подвиги Геракла - VII)**.** Как известно, Посейдон был недоволен тем, что жители острова Крит не принесли ему в жертву легендарного Критского быка. Поэтому Посейдон решил помешать Гераклу выполнить свой седьмой подвиг. Вдоль бесконечнгого берега острова Крит раскинулся архипелаг из бесконечного количества островов. Острова соединены в бесконечную цепочку мостов, и каждый остров соединён мостом с берегом. Посейдон уничтожает гигантской волной каждый мост независимо от других с вероятностью p.

a) Какова вероятность того, что после наводнения, насланного Посейдоном, Геракл, находящийся на Крите, сможет добраться до быка, который находится на первом острове?

b) При каком значении p, вероятность того, что Гераклу удастся добраться до быка составляет хотя бы 0.5?

4.7.3 Гипергеометрическое

Задача 1. В голубом вертолёте Волшебника с мороженым 3 рожка и 4 вафельных стаканчика.

a) Волшебник случайным образом достаёт три мороженых. Найдите вероятность того, что среди них ровно один вафельный стаканчик;

b) После Волшебника, доставшего из вертолёта два рожка и один вафельный стаканчик, в вертолёт лезет Чебурашка и достаёт два мороженых: себе и Гене. Найдите вероятность того, что крокодил Гена и Чебурашка угостятся вафельным стаканчиком.

Задача 2 (Время пострелять)**.** Стрелок стреляет в тире по мишени. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле одна и та же. Стрелок попал в мишень восемь раз из десяти выстрелов. Какова вероятность того, что среди первых пяти выстрелов было ровно четыре удачных?

Задача 3 (Леденцы с любым вкусом)**.** В пачке леденцов Берти Боттс с любым вкусом 27 леденцов, по виду которых невозможно угадать их вкус: 15 леденцов с приятыны вкусом и 12 – с неприятным. Митя достаёт по одному леденцу и пробует, расфасовывая на вкусные и невкусные. В какой-то момент Митя нашёл последнюю невкусную конфетку. Какова вероятность того, что в этот момент в пачке осталось ровно 3 конфеты?

Задача 4 (Побег из акватории)**.** В аквариуме живут 15 осьминогов: 4 кокосовых, 5 карибских рифовых, и 6 мимиков. Иногда эти хитрые животные сбегают из аквариума. В один из таких моментов биолог Клиффорд обнаружил, что в аквариуме не хватает трёх осьминогов. Найдите вероятность того, что в числе сбежавших найдётся хоть один мимик.

Задача 5 (Подвиги Геракла – XXII)**.** Пока Геракл держал небо вместо титана, тот набрал яблок: v волшебных и a сорта Антоновка, которые покрасил в золотой цвет, и принёс смесь герою легенд ($a + v \geqslant 12$). Геракл обманул титана Атласа, но и тот в накладе не остался: Геракл принёс на суд богов смесь из настоящих яблок Гесперид и подкрашенных яблок. Решение о том: справилс ли Геракл с последним подвигом принимает суд из 12 греческих богов. Каждый из них берёт случайное яблоко из принесённых Гераклом и пробует. Положительный вердикт выносится, если больше половины судей признают (а боги однозначно определяют сорт яблок и не лгут) яблоко - яблоком гесперид.

a) Найдите математическое ожидание числа волшебных яблок, которые попробовали боги, если $a = 5$, $v = 15$;

b) Пусть известно, что $a = 6$. Оцените вероятность того, что подвиг Геракла будет не признан судом пантеона;

c) Пусть $a = 4$ и $v = 12$, кроме того каждый судья присуждает Гераклу одно очко, если попробовал волшебное яблоко и отнимает одно очко, если попробовал Антоновку. Найдите распределение случайной величины ξ – число очков Геракла на суде, укажите $\mathbb{E}(\xi)$ и такое ω, что $\mathbb{P}(\xi \leqslant \omega) = \mathbb{P}(\xi > \omega)$.

4.7.4 Распределение Паскаля

Задача 1 (МатАн)**.** На каждый спецкурс ДЕ приходит, независимо от других спецкусов, с вероятностью $\dfrac{1}{8}$. Вычислите:

a) Сколько, в среднем, занятий проходит без ДЕ за триместр (считайте, что в триместре 12 спецкурсов);

b) Вероятность того, что ДЕ появился на МатАне третий раз на пятом по счёту спецкурсе;

c) Среднее число спецкурсов до пятого посещения ДЕ спецкурса;

d) Вероятность того, что за месяц (4 спецкурса) был момент, когда хотя бы два спецкурса подряд проходили вместе с ДЕ.