Тверской государственный университет

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МФТИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Неразрешимость QLC с двумя переменными

Михаил Рыбаков
ТвГУ, НИУ ВШЭ, ВШМ МФТИ

Новосибирск, 19 сентября 2024 года

Мотивация

Пусть **QInt** — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{QLC} & = & \mathbf{QInt} + (p \to q) \vee (q \to p); \\ \mathbf{QKC} & = & \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p; \\ \mathbf{QCl} & = & \mathbf{QInt} + p \vee \neg p. \end{array}$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCl}$.

Алгоритмические свойства:

число переменных:	1	2	3
логика **QLC**:	разрешима	???	неразрешима

2 переменные:	**QCl**	**QLC/QS4.3**	**QKC**
разрешимость:	да	???/нет	нет

X. Caicedo, G. Metcalfe, R. Rodríguez, O. Tuyt (2022)

Разрешимость **QLC** при двух переменных — интригующая открытая проблема.

Синтаксис

Интуиционистские предикатные формулы:

$$\varphi \quad ::= \quad P(x_1, \ldots, x_n) \mid \bot \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi$$

Стандартные сокращения:

$$\begin{array}{rcl} \neg\varphi & = & \varphi \to \bot; \\ \top & = & \neg\bot; \\ \varphi \leftrightarrow \psi & = & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi). \end{array}$$

Семантика Крипке

Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$, где R рефлексивно и транзитивно.

Расширяющиеся области: Пусть $D = (D_w)_{w\in W}$ — система непустых множеств (предметных областей), для которой

$$wRw' \implies D_w \subseteq D_{w'}.$$

Шкала с областями: $\mathfrak{F}_D = \langle W, R, D\rangle$.

Пусть $\mathfrak{M}_w = (D_w, I_w)$ — классическая модель и

$$wRw' \implies I_w(P) \subseteq I_{w'}(P).$$

Модель Крипке: $\mathfrak{M} = (W, R, D, I)$, где $D = (D_w)_{w\in W}$ и $I = (I_w)_{w\in W}$.

Локально постоянные области:

$$wRw' \implies D_w = D_{w'}.$$

Используем обозначение $\mathfrak{F} \odot \mathcal{D}$, если $D_w = \mathcal{D}$ для всех $w \in W$.

Семантика Крипке

Отношение истинности:

- $\mathfrak{M}, w \models^g P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\langle g(x_1), \ldots, g(x_n) \rangle \in I_w(P)$;
- $\mathfrak{M}, w \not\models^g \bot$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \wedge \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ и $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \vee \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \to \psi$, если $\mathfrak{M}, w' \not\models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w' \models^g \psi$ при $w' \in R(w)$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \exists x\, \varphi$, если $\mathfrak{M}, w \models^{g'} \varphi$ для нек. g', т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_w$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \forall x\, \varphi$, если $\mathfrak{M}, w' \models^{g'} \varphi$ для вс. $w' \in R(w)$ и вс. g',
  т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_{w'}$.

- $\mathfrak{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для вс. w и g,
  т.ч. $g(x_1), \ldots, g(x_n) \in D_w$;
- $\mathfrak{F}_D \models \varphi$, если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой модели $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{F}_D$;
- $\mathfrak{F} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы $\mathfrak{F}_D$ на $\mathfrak{F}$;
- $\mathscr{C} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы $\mathfrak{F}_D$ из $\mathscr{C}$.

Логики

Нам будут интересны логики, определённые следующим образом:

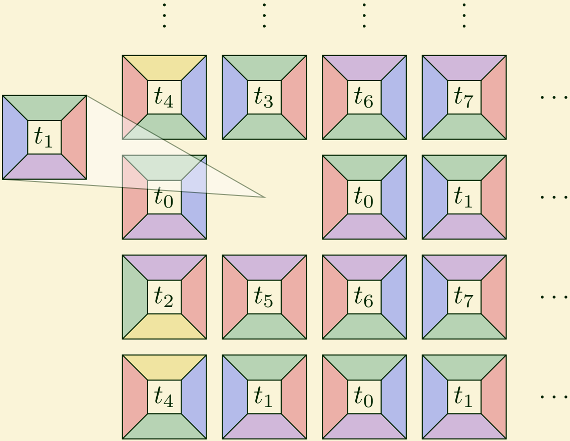
- **QInt** — логика класса всех (интуиционистских) шкал Крипке;
- **QKC** — логика класса всех конвергентных шкал Крипке;
- **QLC** — логика класса всех линейных шкал Крипке;
- $\mathbf{QSIL}(\mathfrak{F}_D)$ — логика шкалы $\mathfrak{F}_D$;
- $\mathbf{QSIL}(\mathfrak{F})$ — логика шкалы $\mathfrak{F}$.

Заметим, что

$$\mathbf{QInt} \subset \mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle) \subset \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle \odot \mathbb{N}) \subset \mathbf{QCl}.$$

Замощение плитками домино

Пусть $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ — набор типов плиток. Пример T-укладки:



Неразрешимая проблема домино

Проблема домино:
по набору $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ типов плиток домино выяснить, существует ли такая T-укладка $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

(1) $f(i, j) = f(i + 1, j)$;

(2) $f(i, j) = f(i, j + 1)$.

Известно, что эта проблема неразрешима (Π^0_1-полна).

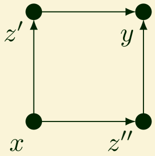
Моделирование домино в **QCl**

Будем использовать следующие элементарные формулы:

- $P_k(x)$ означает «на месте x лежит плитка типа t_k»;
- $H(x,y)$ означает «y находится справа от x»;
- $V(x,y)$ означает «y находится над x».

Сетка $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- $\forall x \exists y\, H(x,y)$;
- $\forall x \exists y\, V(x,y)$;
- $\forall x \forall y\, (\exists z\, (H(x,z) \wedge V(z,y)) \leftrightarrow \exists z\, (V(x,z) \wedge H(z,y)))$.



Замечание. Суть условия: $\forall x \forall y\, ([H \circ V](x,y) \leftrightarrow [V \circ H](x,y))$.

Моделирование домино в **QCl**

Теперь легко описать наличие T-укладки.

- На каждом месте лежит плитка ровно одного типа:

$$\forall x \bigvee_{i=0}^{n} \Big(P_i(x) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg P_j(x) \Big).$$

- Выполнено условие (1) для T-укладки:

$$\forall x \bigwedge_{i=0}^{n} \Big(P_i(x) \to \forall y \left(H(x,y) \to \bigvee_{\text{◨} t_i = \text{◧} t_j} P_j(y) \right) \Big).$$

- Выполнено условие (2) для T-укладки:

$$\forall x \bigwedge_{i=0}^{n} \Big(P_i(x) \to \forall y \left(V(x,y) \to \bigvee_{\text{⬒} t_i = \text{⬓} t_j} P_j(y) \right) \Big).$$

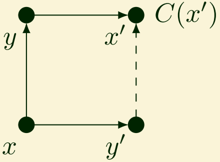
Моделирование домино в **QK**

Моделируем равенство композиций $V \circ H$ и $H \circ V$:

- $\Box\forall x\forall y\,\Big(V(x,y) \wedge \exists x\,\big(C(x) \wedge H(y,x)\big) \to \forall y\,\big(H(x,y) \to \forall x\,(C(x) \to V(y,x))\big)\Big)$;
- $\forall x\,\Diamond C(x)$;
- $\forall x\forall y\,(V(x,y) \to \Box V(x,y)) \wedge \forall x\forall y\,(\Diamond V(x,y) \to V(x,y))$;
- $\forall x\forall y\,(H(x,y) \to \Box H(x,y)) \wedge \forall x\forall y\,(\Diamond H(x,y) \to H(x,y))$.

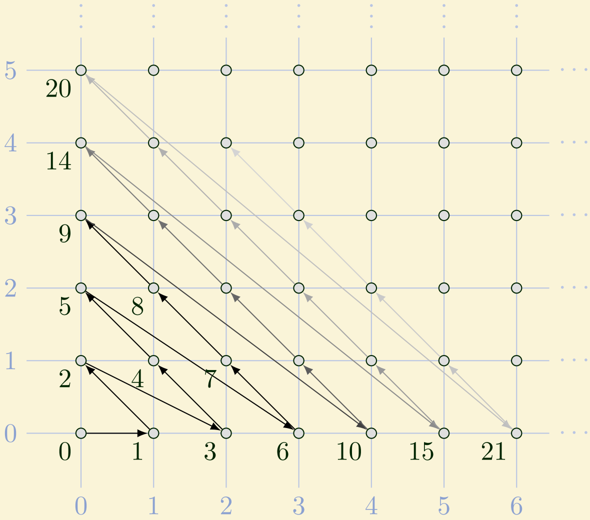
Перепишем первую формулу:

$$\Box\forall x\forall y\,\Big(V(x,y) \wedge \exists x'\,\big(C(x') \wedge H(y,x')\big) \to \forall y'\,\big(H(x,y') \to \forall \underline{x}'\,(C(\underline{x}') \to V(y',\underline{x}'))\big)\Big).$$

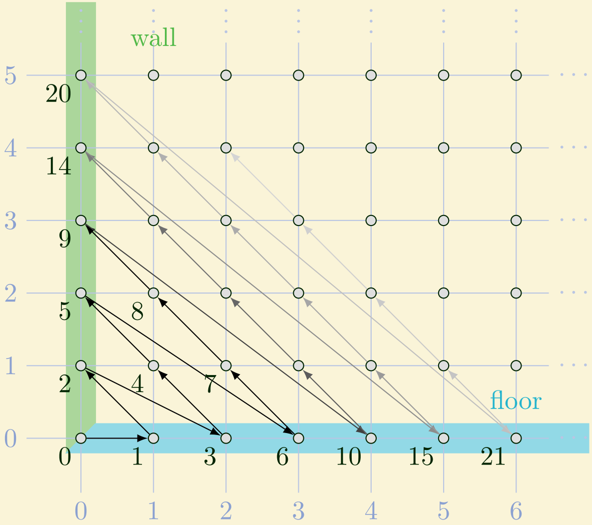


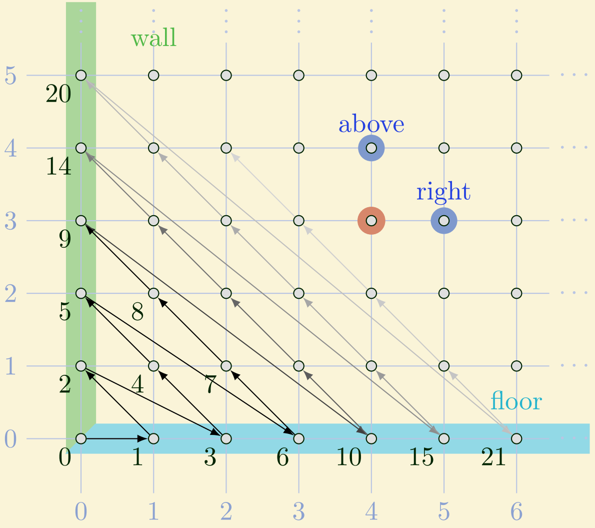
Аналогично в **QInt**, **QKC**, **QS4.3**,
но не в **QLC**

Нумерация Г. Кантора (M. Marx & M. Reynolds)

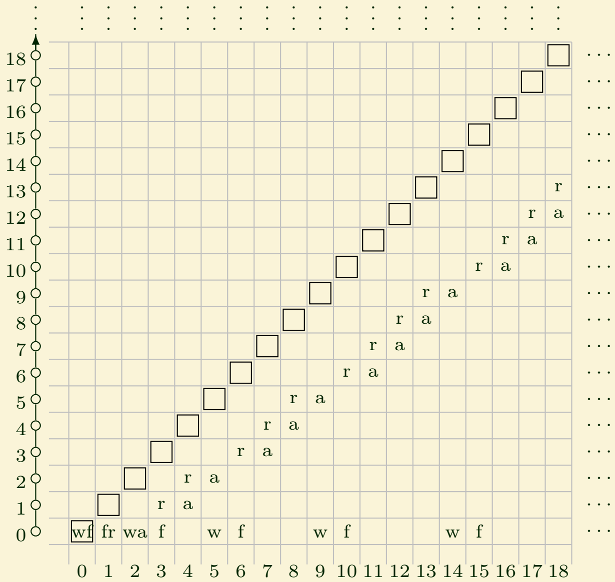


Нумерация Г. Кантора (M. Marx & M. Reynolds)

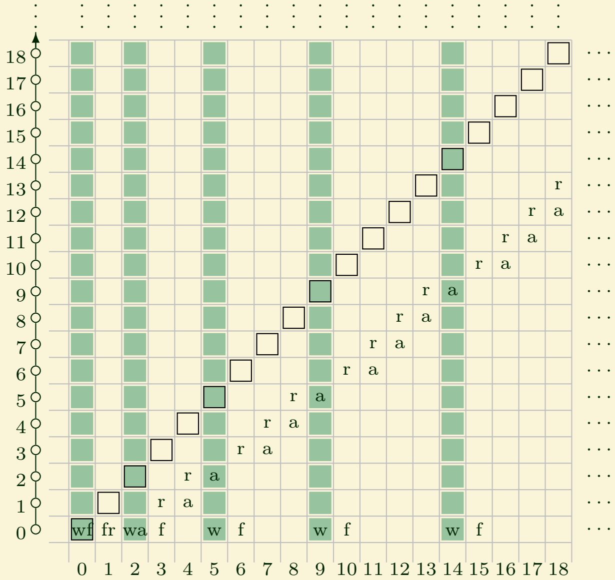



wall
above
right
floor
0
1
2
3
4
5
6
20
14
9
5
8
2
4
7
0
1
3
6
10
15
21

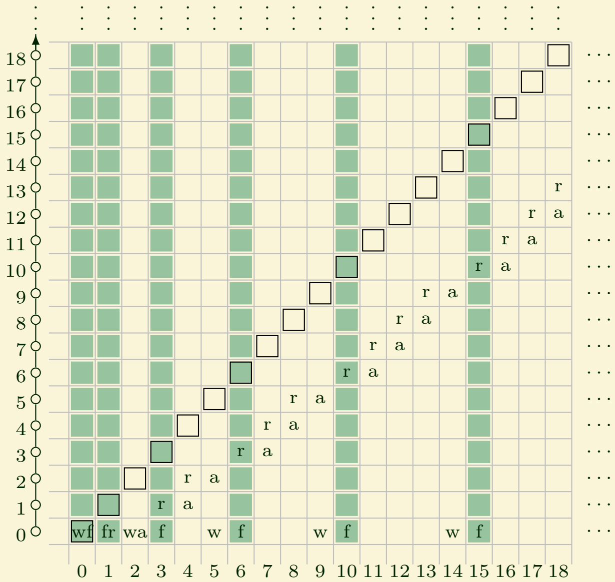
Полезная картинка



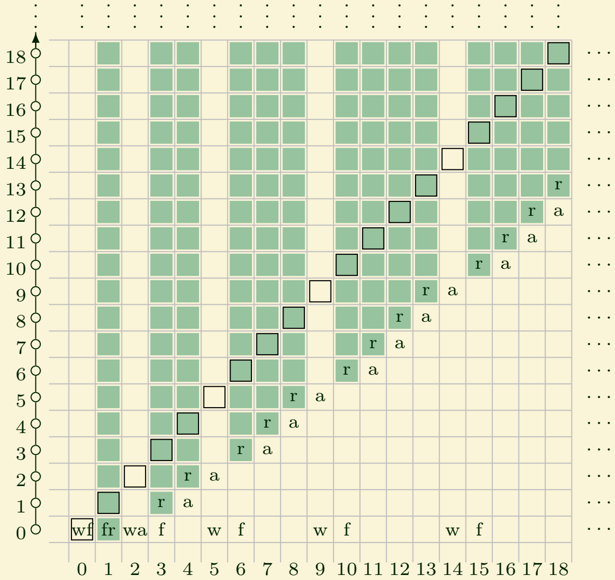
Полезная картинка: *wall*



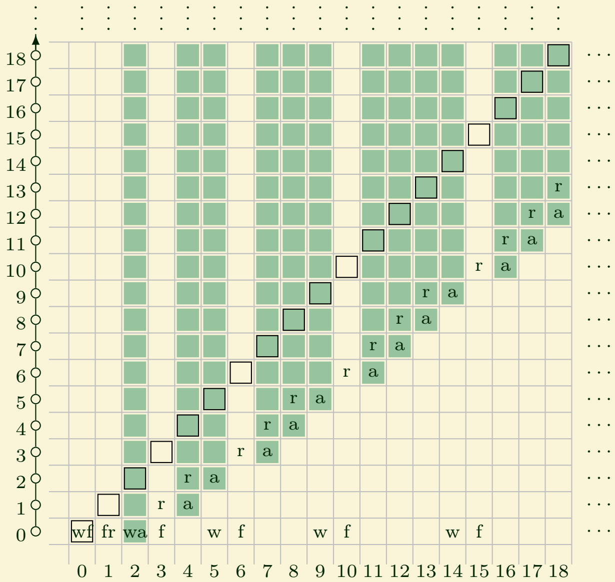
Полезная картинка: *floor*



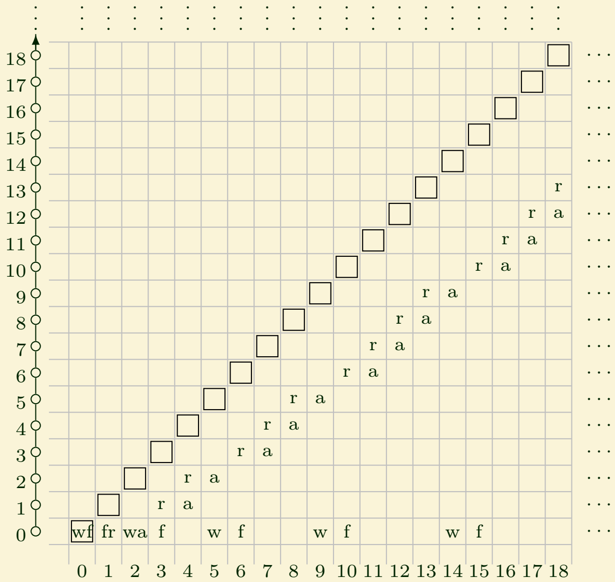
Полезная картинка: *right*



Полезная картинка: *above*



Полезная картинка



Техническая идея: «двойные метки»

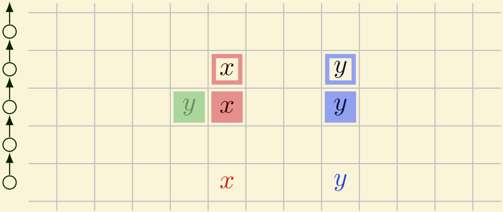
Идея: для того, чтобы *выделить* элемент в предметной области мира модели, используем две унарные буквы, скажем, Q и Q'.

Чтобы выделить элемент x, опровергаем $Q(x) \to Q'(x)$.

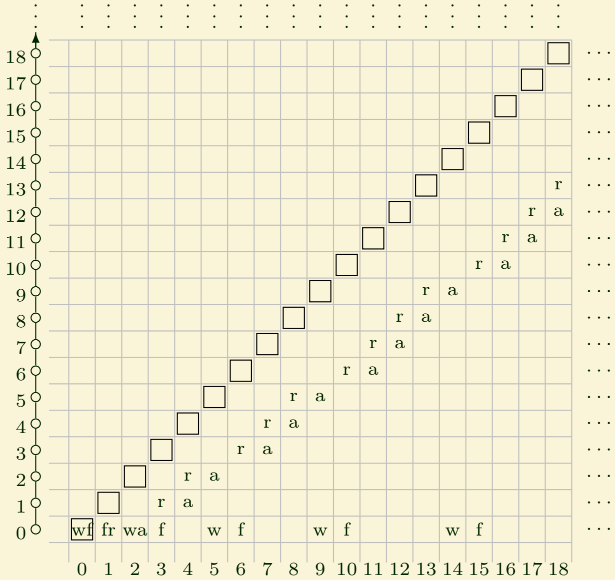
Чтобы выделить элементы x и y, опровергаем $Q(x) \wedge S(y) \to Q'(x) \vee S'(y)$.

Чтобы задествовать больше элементов, используем бинарное отношение и кванторы:

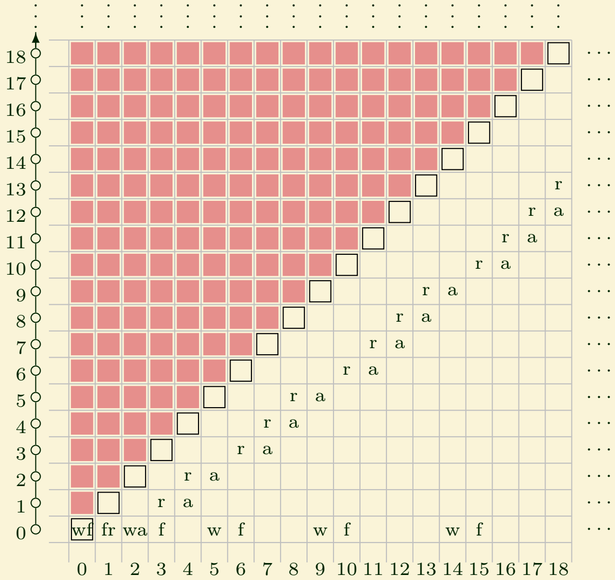
$$\Big(\varphi(x,y) \to \psi(x,y)\Big) \to$$
$$\to \Big(\exists y\, \big(y \lhd x \wedge P(y)\big) \wedge Q(x) \wedge S(y) \to Q'(x) \vee S'(y)\Big).$$



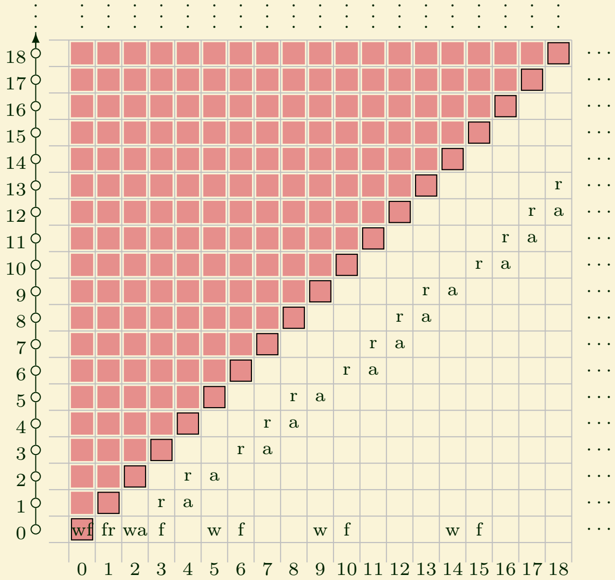
Полезная картинка



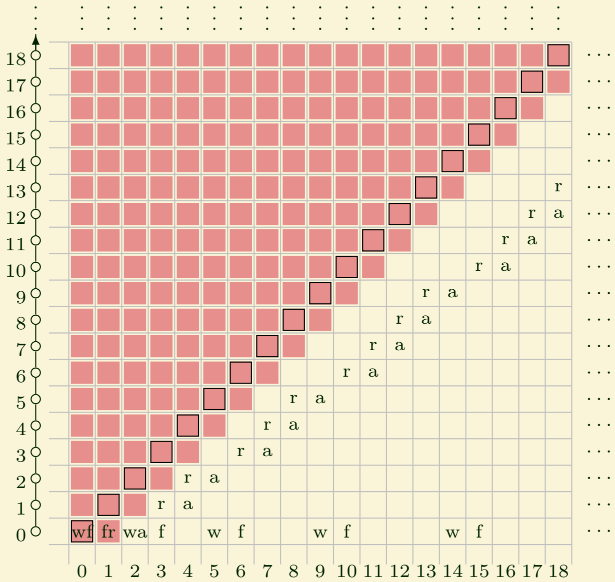
Полезная картинка: метка Q'



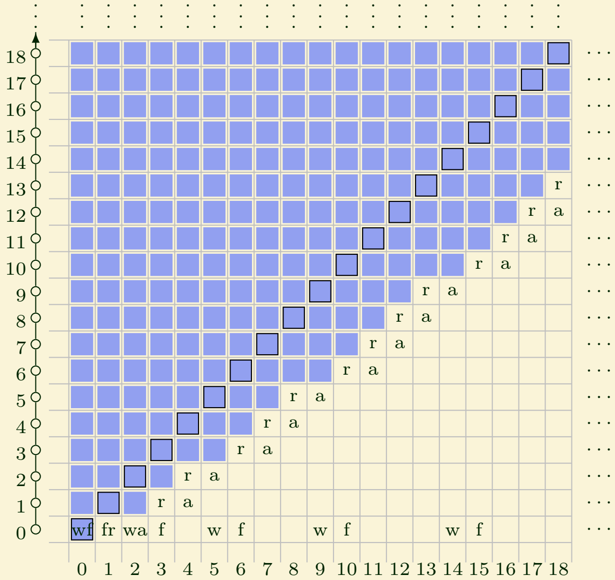
Полезная картинка: метка Q



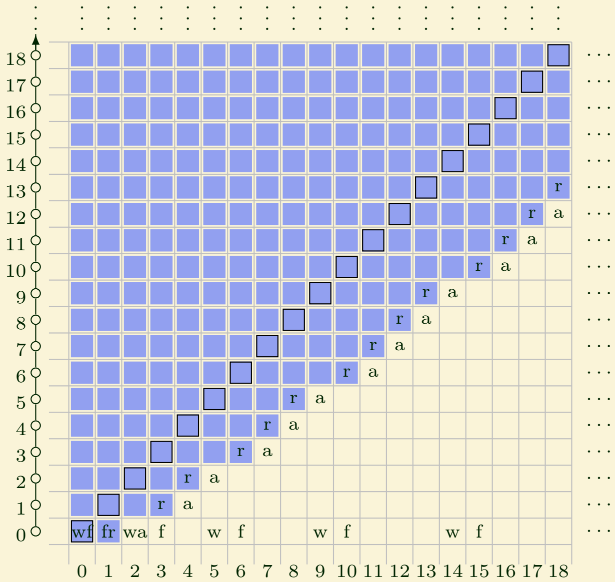
Полезная картинка: метка *next*



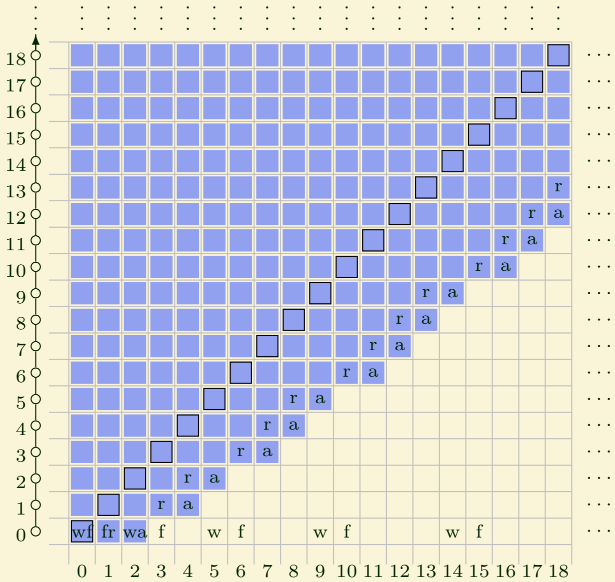
Полезная картинка: метка S''



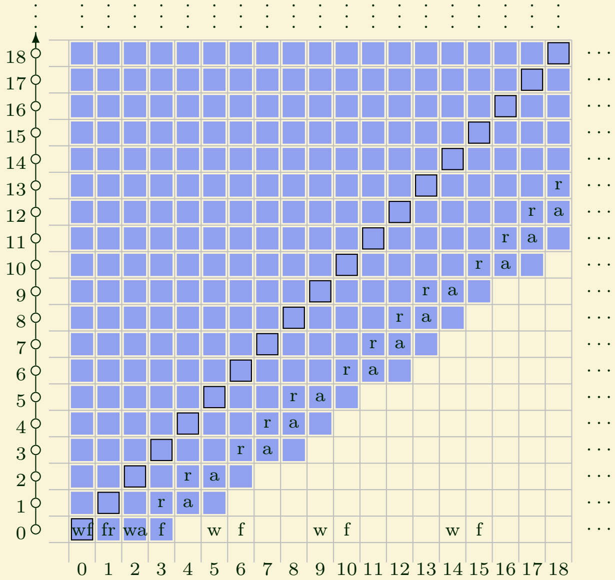
Полезная картинка: метка S'



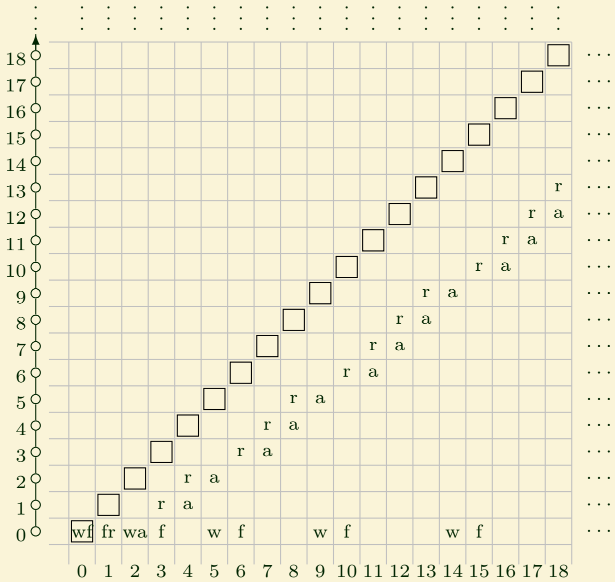
Полезная картинка: метка S



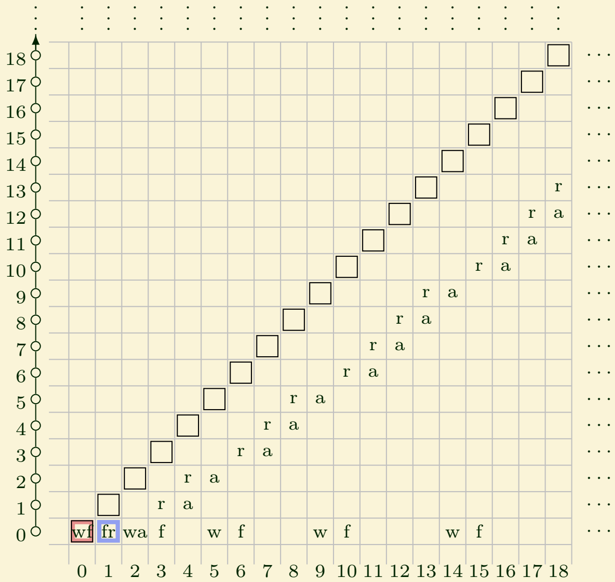
Полезная картинка: метка G



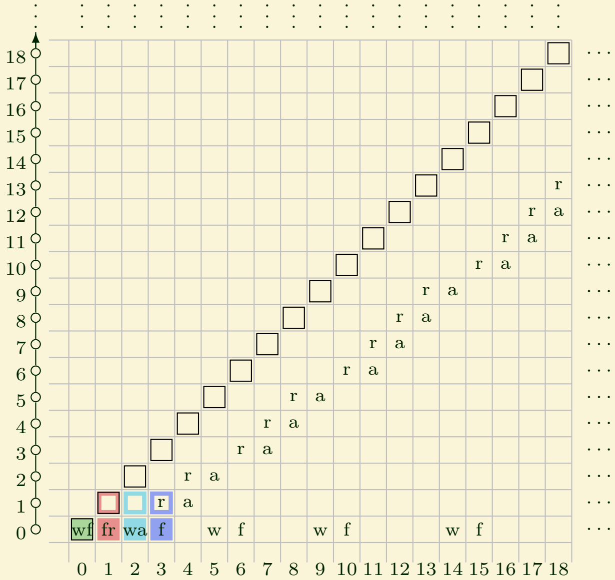
Полезная картинка



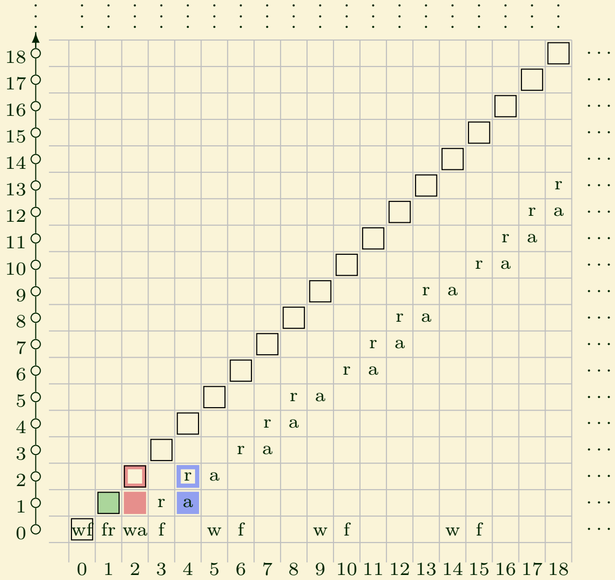
Полезная картинка



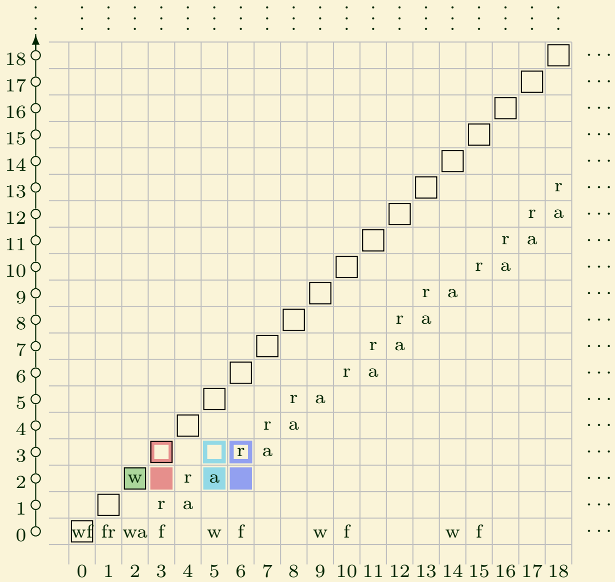
Полезная картинка



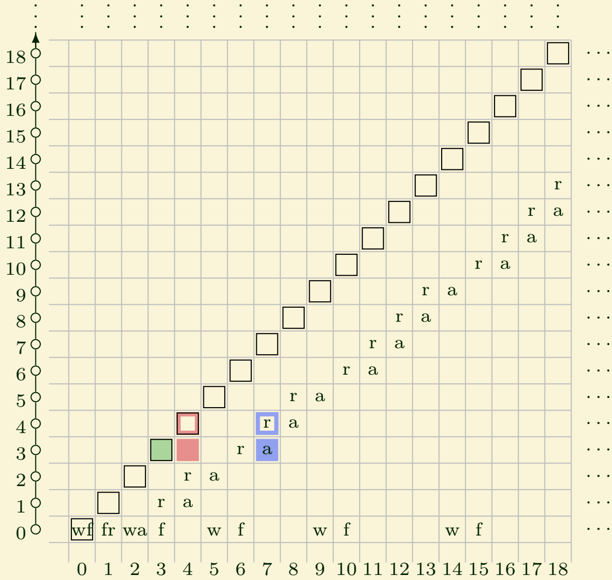
Полезная картинка

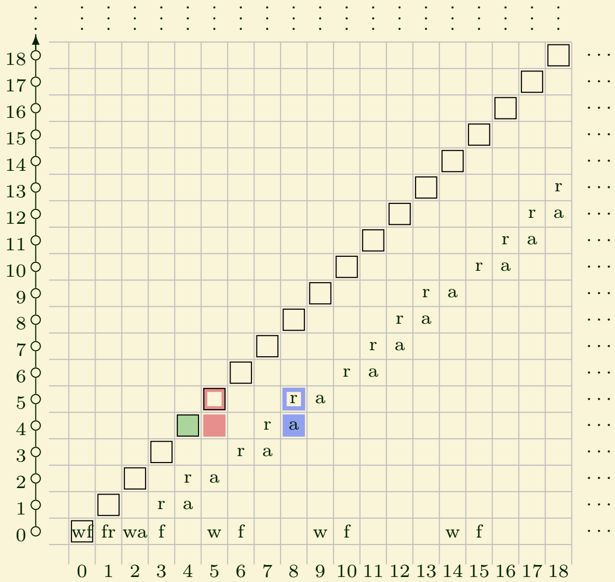


Полезная картинка

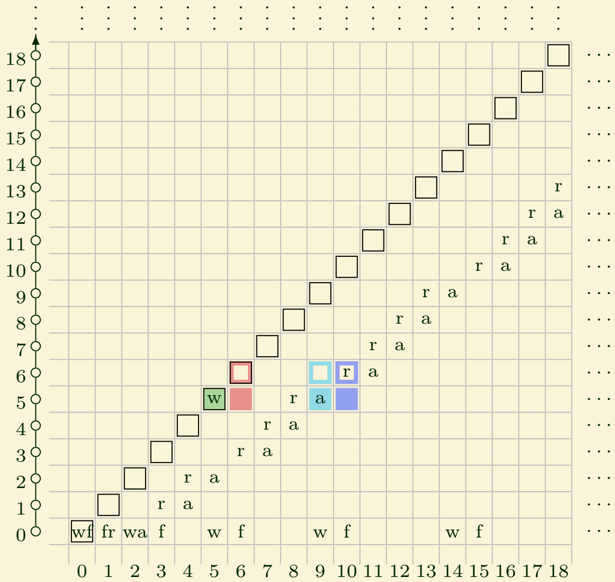


Полезная картинка

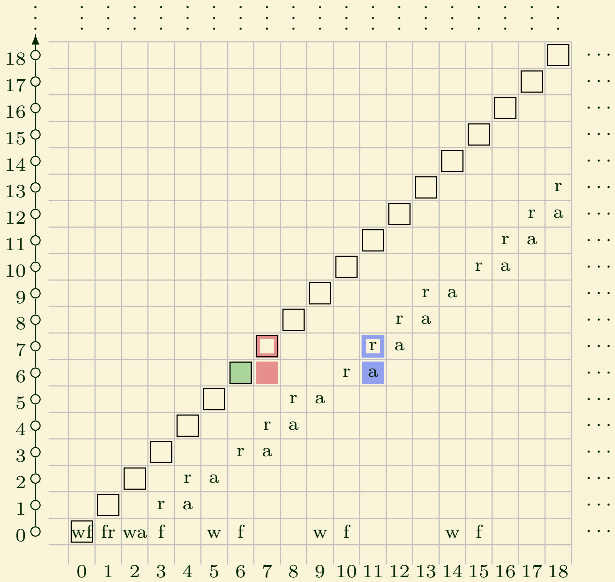


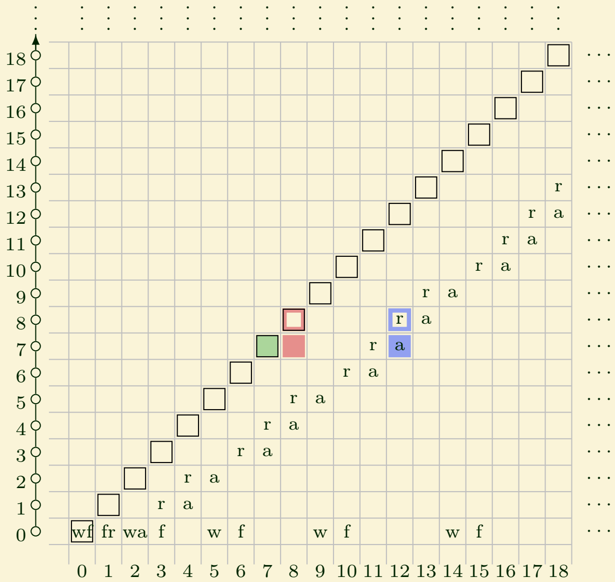

18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
wf fr wa f w f w f w f
r a
r a
r a
r a
r
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Полезная картинка



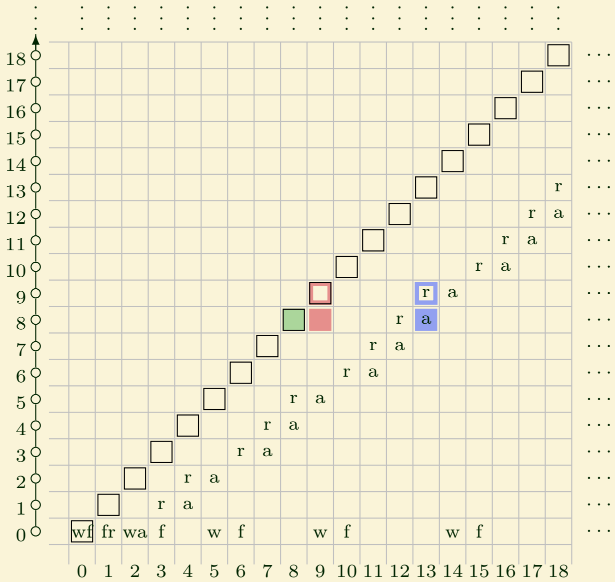
Полезная картинка



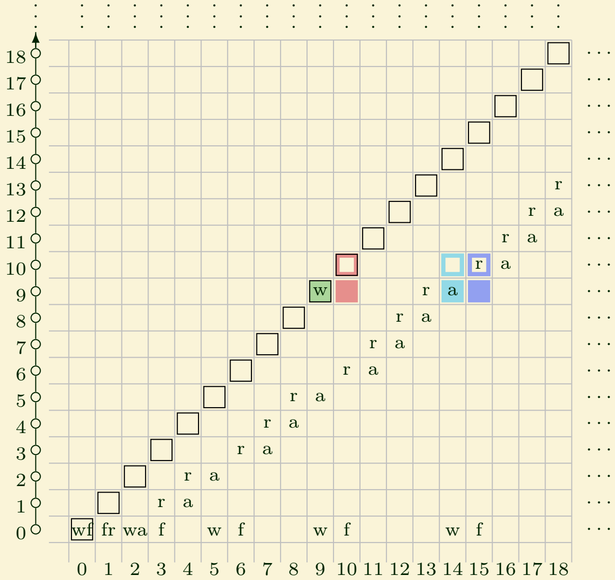


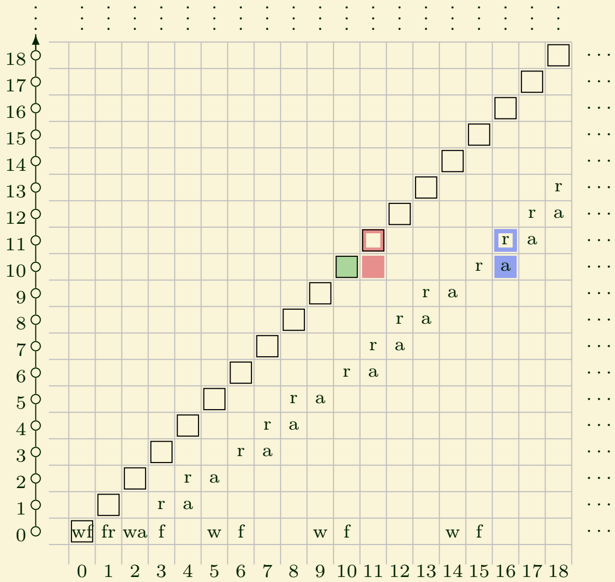
wf fr wa f w f w f w f
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r a
r
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Полезная картинка

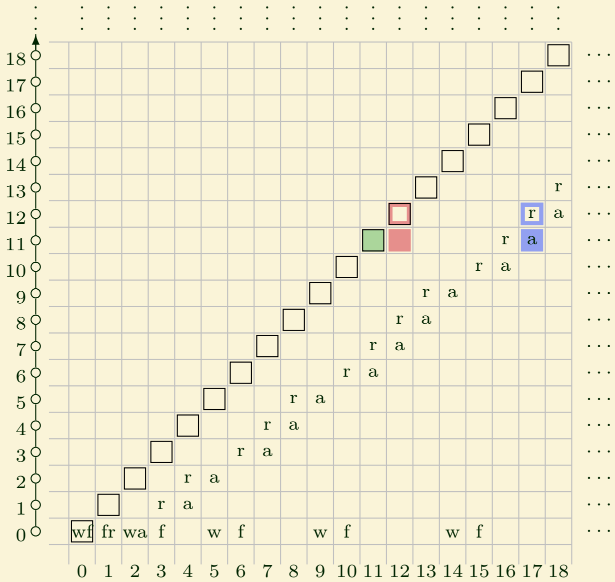


Полезная картинка

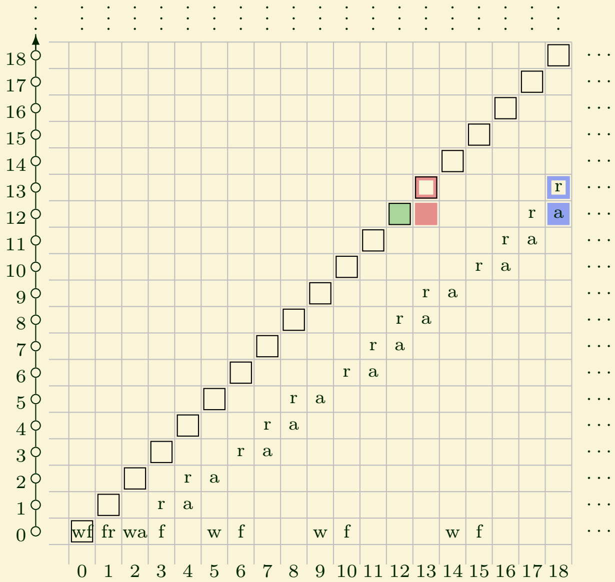



wf
fr
wa
f
w
f
w
f
w
f
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
a
r
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

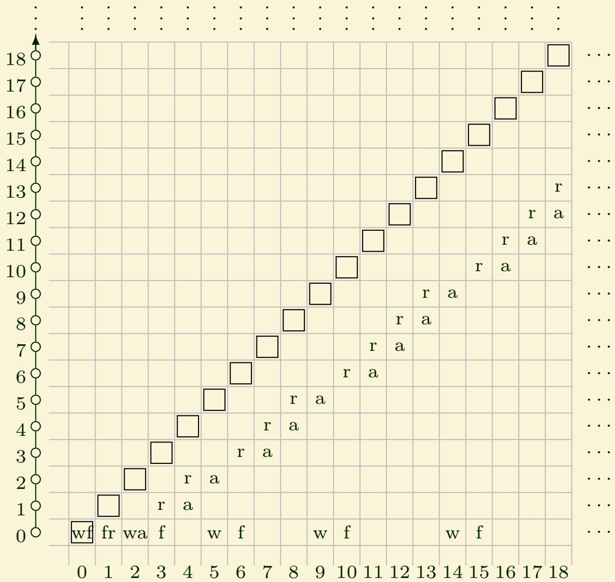
Полезная картинка



Полезная картинка



Полезная картинка



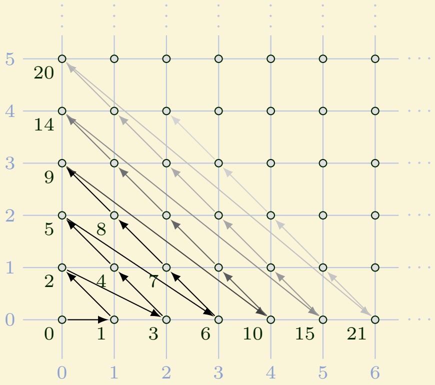
Двойные метки, формула DL

$$
\begin{aligned}
\mathit{Serial}_{\lhd} &= \forall x \exists y\, (x \lhd y);\\
\mathit{Diag}_N &= \forall x \forall y\, \Big(x \lhd y \to \big(Q(x) \leftrightarrow \mathit{next}(y)\big)\Big);\\
\mathit{Diag}_Q &= \forall x \forall y\, \Big(x \lhd y \to \big(Q'(x) \leftrightarrow Q(y)\big)\Big);\\
\mathit{Diag}_S &= \forall x \forall y\, \Big(x \lhd y \to \big(S'(x) \leftrightarrow S(y)\big) \wedge \big(S''(x) \leftrightarrow S'(y)\big)\Big);\\
\mathit{Diag}_G &= \forall x \forall y\, \Big(x \lhd y \to \big(S(x) \leftrightarrow G(y)\big)\Big);\\
\mathit{Agree}_S &= \forall x \forall y\, \Big(\big(Q(x) \wedge S(y) \to Q'(x) \vee S'(y)\big) \vee {}\\
&\qquad\qquad \vee \big(Q(x) \wedge S'(y) \to Q'(x) \vee S''(y)\big)\Big);\\
\mathit{Agree}_G &= \forall x \forall y\, \Big(\big(Q(x) \wedge G(y) \to Q'(x) \vee S(y)\big) \vee {}\\
&\qquad\qquad \vee \big(Q(x) \wedge S'(y) \to Q'(x) \vee S''(y)\big)\Big);\\
\mathit{Agree}_{\lhd} &= \forall x \forall y\, \big(y \lhd x \wedge S(x) \to S(y)\big).
\end{aligned}
$$

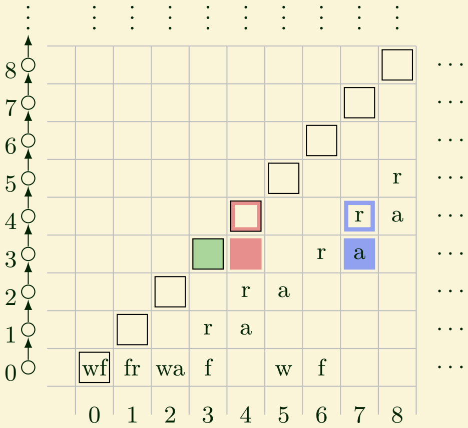
$$
\mid Q'(k-1) \mid Q(k) \mid \mathit{next}(k+1) \mid \ldots \mid S''(m-2) \mid S'(m-1) \mid S(m) \mid G(m+1) \mid
$$

Встраивание сетки, формула $FRAW$

$$
\begin{aligned}
EM_W &= \forall x \left(wall(x) \vee \neg wall(x) \right); \\
Conn_1 &= \forall x \Big(\left(floor(x) \to \neg above(x) \right) \wedge \left(wall(x) \to \neg right(x) \right) \Big); \\
Conn_2 &= \forall x \forall y \Big(x \lhd y \to \left(right(x) \to above(y) \right) \wedge \left(wall(x) \to floor(y) \right) \Big); \\
Conn_3 &= \forall x \Big(\left(above(x) \to S(x) \right) \wedge \left(right(x) \to S'(x) \right) \Big); \\
Start_{\lhd} &= \forall x \forall y \left(x \lhd y \wedge wall(x) \wedge floor(x) \to right(y) \right).
\end{aligned}
$$



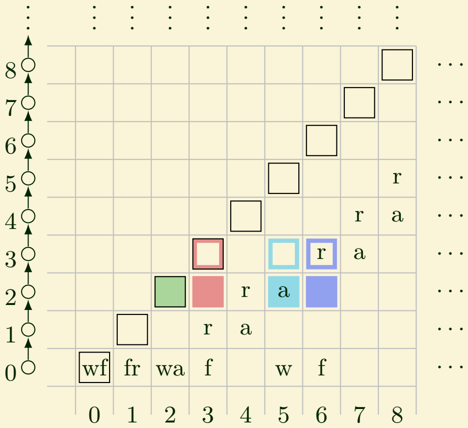
Формула $Move_1$



$$Move_1 \quad = \quad \forall x \forall y \Big(\big(\neg wall(y) \wedge right(y) \wedge Q(x) \to Q'(x) \vee S''(y) \big) \to$$

$$\to \big(\exists y \, (y \lhd x \wedge \underline{\neg wall(y)}) \wedge next(x) \wedge above(y) \to Q(x) \vee S'(y) \big) \Big).$$

Формула $Move_2$



$$Move_2 \quad =$$

$$= \quad \forall x \forall y \Big(\big(\forall x\, (x \lhd y \to wall(x)) \wedge \neg wall(y) \wedge right(y) \wedge Q(x) \to Q'(x) \vee S''(y)\big) \to$$

$$\to \big(\exists y\, (y \lhd x \wedge \underline{wall(y)}) \wedge next(x) \wedge \exists x\, (x \lhd y \wedge above(x)) \wedge G(y) \to Q(x) \vee S(y)\big)\Big).$$

Описание свойств T-укладки

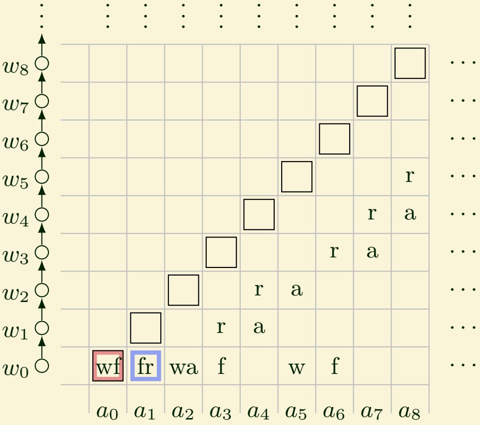
Пусть $Grid$ — конъюнкция всех предыдущих формул.
Пусть также

$$
\begin{array}{rcl}
T_0 & = & \forall x \displaystyle\bigvee_{i=0}^{n} \Big(P_i(x) \wedge \bigwedge_{j \neq i}^{n} \neg P_j(x) \Big); \\[2ex]
T_1 & = & \forall x \forall y \displaystyle\bigwedge_{i=0}^{n} \Big(\bigvee \{ P_j(y) : \boxed{\triangleleft}\, t_i \neq \boxed{\triangleright}\, t_j \} \to \\
 & & \qquad\qquad \to \big(right(y) \wedge Q(x) \wedge P_i(x) \to Q'(x) \vee S''(y) \big) \Big); \\[2ex]
T_2 & = & \forall x \forall y \displaystyle\bigwedge_{i=0}^{n} \Big(\bigvee \{ P_j(y) : \boxed{\triangledown}\, t_i \neq \boxed{\vartriangle}\, t_j \} \to \\
 & & \qquad\qquad \to \big(above(y) \wedge Q(x) \wedge P_i(x) \to Q'(x) \vee S'(y) \big) \Big); \\[2ex]
Tiling_T & = & T_0 \wedge T_1 \wedge T_2.
\end{array}
$$

Описание свойств T-укладки

Теперь положим

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Refute} & = & \forall x \forall y \left(x \lhd y \wedge \mathit{wall}(x) \wedge \mathit{floor}(x) \wedge Q(x) \to Q'(x) \vee S''(y) \right); \\ \varphi_T & = & \mathit{Grid} \wedge \mathit{Tiling}_T \to \mathit{Refute}. \end{array}$$



Лемма

Существует T-укладка $\iff$ $\varphi_T \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

*Логика **QLC** неразрешима (Σ^0_1-полна) в языке с двумя предметными переменными.*

Теорема

Пусть $\mathbf{QLC} \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L неразрешима (Σ^0_1-трудна) в языке с двумя предметными переменными.

Следствие

*Следующие логики неразрешимы в языке с двумя предметными переменными: **QLC.cd**, $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle)$, $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle)$, а также $\mathbf{QSIL}(\langle \alpha, \subseteq \rangle)$, где α — бесконечный ординал.*

Позитивный фрагмент

В фомуле φ_T можно элиминировать $\perp$.
Например, можно заменить $\perp$ на $\forall x\, Q'(x)$.
Пусть $\varphi_T^+ = [\forall x\, Q'(x)/\perp]\varphi_T$.

Лемма

Существует T-укладка $\iff$ $\varphi_T^+ \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

Логика $\mathbf{QLC}^+$ неразрешима (Σ_1^0-полна) в языке с двумя предметными переменными.

Теорема

Пусть $\mathbf{QLC} \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L^+ неразрешима (Σ_1^0-трудна) в языке с двумя предметными переменными.

Σ^0_1-трудная проблема домино

Проблема домино:
по набору $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ типов плиток домино выяснить, существует ли такая T-укладка $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

(1) $\text{◨}\, f(i,j) = \text{◧}\, f(i+1,j)$;

(2) $\text{⬒}\, f(i,j) = \text{⬓}\, f(i,j+1)$,

а также

(3) $f(0,0) = t_0$

и существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $j \in \mathbb{N}$

(4) $f(0, k_0 + j) = t_1$.

Нетрудно показать, что эта проблема Σ^0_1-трудна.

Трудность в классе Π^0_1

Пусть

$$
\begin{array}{rcl}
x \preccurlyeq y & = & Q(y) \to Q(x); \\
Agree_{\preccurlyeq} & = & \forall x \forall y\, (x \lhd y \to x \preccurlyeq y); \\
T_3 & = & \forall x\, \big(wall(x) \wedge floor(x) \to P_0(x)\big); \\
T_4 & = & \exists x \forall y\, \big(x \preccurlyeq y \wedge wall(y) \to P_1(y)\big); \\
Refute_Q & = & \exists x\, (Q(x) \to Q'(x)); \\
Grid' & = & Grid \wedge Agree_{\preccurlyeq}; \\
Tiling'_T & = & Tiling_T \wedge T_3 \wedge T_4; \\
Refute' & = & Refute \vee Refute_Q; \\
\psi_T & = & Grid' \wedge Tiling'_T \to Refute'.
\end{array}
$$

Теорема

Пусть $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle) \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle \odot \mathbb{N})$. *Тогда* L^+ *одновременно* Σ^0_1*-трудна и* Π^0_1*-трудна в языке с двумя предметными переменными.*

Благодарность

Спасибо за внимание!