



Тверской
государственный
университет



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



Неразрешимость QLC с двумя переменными

Михаил Рыбаков
ТьГУ, НИУ ВШЭ, ВШМ МФТИ

Москва, ВШМ МФТИ

25 сентября 2024 года

Пусть \mathbf{QInt} — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\mathbf{QLC} = \mathbf{QInt} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

$$\mathbf{QKC} = \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p;$$

$$\mathbf{QCl} = \mathbf{QInt} + p \vee \neg p.$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCl}$.

Пусть \mathbf{QInt} — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\mathbf{QLC} = \mathbf{QInt} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

$$\mathbf{QKC} = \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p;$$

$$\mathbf{QCl} = \mathbf{QInt} + p \vee \neg p.$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCl}$.

Алгоритмические свойства:

Пусть \mathbf{QInt} — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\mathbf{QLC} = \mathbf{QInt} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

$$\mathbf{QKC} = \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p;$$

$$\mathbf{QCl} = \mathbf{QInt} + p \vee \neg p.$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCl}$.

Алгоритмические свойства:

число переменных:	1	2	3
логика \mathbf{QLC} :	разрешима	???	неразрешима

Пусть \mathbf{QInt} — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\mathbf{QLC} = \mathbf{QInt} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

$$\mathbf{QKC} = \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p;$$

$$\mathbf{QCI} = \mathbf{QInt} + p \vee \neg p.$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCI}$.

Алгоритмические свойства:

число переменных:	1	2	3
логика \mathbf{QLC} :	разрешима	???	неразрешима
2 переменные:	\mathbf{QCI}	$\mathbf{QLC}/\mathbf{QS4.3}$	\mathbf{QKC}
разрешимость:	да	???	нет

Пусть \mathbf{QInt} — интуиционистская предикатная логика. Тогда

$$\mathbf{QLC} = \mathbf{QInt} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p);$$

$$\mathbf{QKC} = \mathbf{QInt} + \neg p \vee \neg\neg p;$$

$$\mathbf{QCl} = \mathbf{QInt} + p \vee \neg p.$$

При этом $\mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QCl}$.

Алгоритмические свойства:

число переменных:	1	2	3
логика \mathbf{QLC} :	разрешима	???	неразрешима
2 переменные:	\mathbf{QCl}	$\mathbf{QLC}/\mathbf{QS4.3}$	\mathbf{QKC}
разрешимость:	да	???	нет

X. Caicedo, G. Metcalfe, R. Rodríguez, O. Tuyst (2022)

Разрешимость \mathbf{QLC} при двух переменных — интригующая открытая проблема.

Интуиционистские предикатные формулы:

$$\varphi ::= P(x_1, \dots, x_n) \mid \perp \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid \forall x \varphi \mid \exists x \varphi$$

Стандартные сокращения:

$$\begin{aligned}\neg \varphi &= \varphi \rightarrow \perp; \\ \top &= \neg \perp; \\ \varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi).\end{aligned}$$

Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, где R рефлексивно и транзитивно.

Расширяющиеся области: Пусть $D = (D_w)_{w \in W}$ — система непустых множеств (предметных областей), для которой

$$wRw' \implies D_w \subseteq D_{w'}.$$

Шкала с областями: $\mathfrak{F}_D = \langle W, R, D \rangle$.

Пусть $\mathfrak{M}_w = (D_w, I_w)$ — классическая модель и

$$wRw' \implies I_w(P) \subseteq I_{w'}(P).$$

Модель Крипке: $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$, где $D = (D_w)_{w \in W}$ и $I = (I_w)_{w \in W}$.

Локально постоянные области:

$$wRw' \implies D_w = D_{w'}.$$

Используем обозначение $\mathfrak{F} \odot \mathcal{D}$, если $D_w = \mathcal{D}$ для всех $w \in W$.

Отношение истинности:

- $\mathfrak{M}, w \models^g P(x_1, \dots, x_n)$, если $\langle g(x_1), \dots, g(x_n) \rangle \in I_w(P)$;
- $\mathfrak{M}, w \not\models^g \perp$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \wedge \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ и $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \vee \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \rightarrow \psi$, если $\mathfrak{M}, w' \not\models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w' \models^g \psi$ при $w' \in R(w)$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \exists x \varphi$, если $\mathfrak{M}, w \models^{g'} \varphi$ для нек. g' , т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_w$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \forall x \varphi$, если $\mathfrak{M}, w' \models^{g'} \varphi$ для вс. $w' \in R(w)$ и вс. g' ,
т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_{w'}$.
- $\mathfrak{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi(x_1, \dots, x_n)$ для вс. w и g ,
т.ч. $g(x_1), \dots, g(x_n) \in D_w$;
- $\mathfrak{F}_D \models \varphi$, если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой модели \mathfrak{M} на \mathfrak{F}_D ;
- $\mathfrak{F} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы \mathfrak{F}_D на \mathfrak{F} ;
- $\mathcal{C} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы \mathfrak{F}_D из \mathcal{C} .

Нам будут интересны логики, определённые следующим образом:

- **QInt** — логика класса всех (интуиционистских) шкал Крипке;
- **QKC** — логика класса всех конвергентных шкал Крипке;
- **QLC** — логика класса всех линейных шкал Крипке;
- **QSIL**(\mathfrak{F}_D) — логика шкалы \mathfrak{F}_D ;
- **QSIL**(\mathfrak{F}) — логика шкалы \mathfrak{F} .

Нам будут интересны логики, определённые следующим образом:

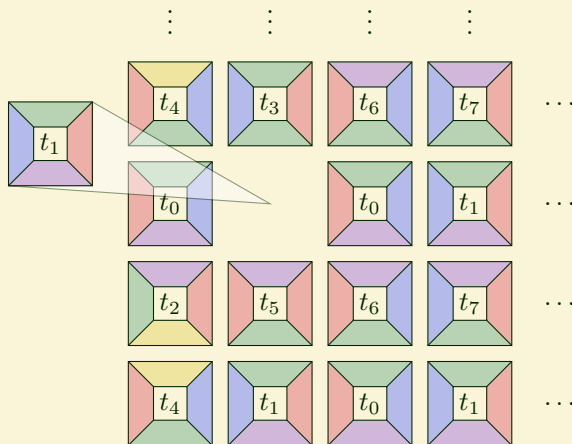
- **QInt** — логика класса всех (интуиционистских) шкал Крипке;
- **QKC** — логика класса всех конвергентных шкал Крипке;
- **QLC** — логика класса всех линейных шкал Крипке;
- **QSIL**(\mathfrak{F}_D) — логика шкалы \mathfrak{F}_D ;
- **QSIL**(\mathfrak{F}) — логика шкалы \mathfrak{F} .

Заметим, что

$$\mathbf{QInt} \subset \mathbf{QKC} \subset \mathbf{QLC} \subset \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle) \subset \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \odot \mathbb{N}) \subset \mathbf{QCl}.$$

Замоещение плитками домино

Пусть $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ — набор типов плиток. Пример T -укладки:



Неразрешимая проблема домино

Проблема домино:

по набору $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ типов плиток домино выяснить, существует ли такая T -укладка $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$(1) \quad \boxtimes f(i, j) = \boxtimes f(i + 1, j);$$

$$(2) \quad \boxtimes f(i, j) = \boxtimes f(i, j + 1).$$

Известно, что эта проблема неразрешима (Π_1^0 -полна).

Будем использовать следующие элементарные формулы:

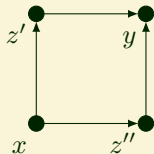
- $P_k(x)$ означает «на месте x лежит плитка типа t_k »;
- $H(x, y)$ означает « y находится справа от x »;
- $V(x, y)$ означает « y находится над x ».

Будем использовать следующие элементарные формулы:

- $P_k(x)$ означает «на месте x лежит плитка типа t_k »;
- $H(x, y)$ означает « y находится справа от x »;
- $V(x, y)$ означает « y находится над x ».

Сетка $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- $\forall x \exists y H(x, y)$;
- $\forall x \exists y V(x, y)$;
- $\forall x \forall y (\exists z (H(x, z) \wedge V(z, y)) \leftrightarrow \exists z (V(x, z) \wedge H(z, y)))$.

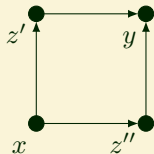


Будем использовать следующие элементарные формулы:

- $P_k(x)$ означает «на месте x лежит плитка типа t_k »;
- $H(x, y)$ означает « y находится справа от x »;
- $V(x, y)$ означает « y находится над x ».

Сетка $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- $\forall x \exists y H(x, y)$;
- $\forall x \exists y V(x, y)$;
- $\forall x \forall y (\exists z (H(x, z) \wedge V(z, y)) \leftrightarrow \exists z (V(x, z) \wedge H(z, y)))$.



Замечание. Суть условия: $\forall x \forall y ([H \circ V](x, y) \leftrightarrow [V \circ H](x, y))$.

Теперь легко описать наличие T -укладки.

- На каждом месте лежит плитка ровно одного типа:

$$\forall x \bigvee_{i=0}^n \left(P_i(x) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg P_j(x) \right).$$

- Выполнено условие (1) для T -укладки:

$$\forall x \bigwedge_{i=0}^n \left(P_i(x) \rightarrow \forall y \left(H(x, y) \rightarrow \bigvee_{\boxtimes t_i = \boxtimes t_j} P_j(y) \right) \right).$$

- Выполнено условие (2) для T -укладки:

$$\forall x \bigwedge_{i=0}^n \left(P_i(x) \rightarrow \forall y \left(V(x, y) \rightarrow \bigvee_{\boxtimes t_i = \boxtimes t_j} P_j(y) \right) \right).$$

Моделируем равенство композиций $V \circ H$ и $H \circ V$:

- $\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x (C(x) \wedge H(y, x)) \rightarrow \forall y (H(x, y) \rightarrow \forall x (C(x) \rightarrow V(y, x))) \right)$;
- $\forall x \Diamond C(x)$;
- $\forall x \forall y (V(x, y) \rightarrow \Box V(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond V(x, y) \rightarrow V(x, y))$;
- $\forall x \forall y (H(x, y) \rightarrow \Box H(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond H(x, y) \rightarrow H(x, y))$.

Моделируем равенство композиций $V \circ H$ и $H \circ V$:

- $\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x (C(x) \wedge H(y, x)) \rightarrow \forall y (H(x, y) \rightarrow \forall x (C(x) \rightarrow V(y, x))) \right)$;
- $\forall x \Diamond C(x)$;
- $\forall x \forall y (V(x, y) \rightarrow \Box V(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond V(x, y) \rightarrow V(x, y))$;
- $\forall x \forall y (H(x, y) \rightarrow \Box H(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond H(x, y) \rightarrow H(x, y))$.

Перепишем первую формулу:

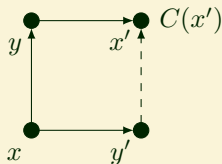
$$\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x' (C(x') \wedge H(y, x')) \rightarrow \forall y' (H(x, y') \rightarrow \forall \underline{x}' (C(\underline{x}') \rightarrow V(y', \underline{x}')) \right).$$

Моделируем равенство композиций $V \circ H$ и $H \circ V$:

- $\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x (C(x) \wedge H(y, x)) \rightarrow \forall y (H(x, y) \rightarrow \forall x (C(x) \rightarrow V(y, x))) \right)$;
- $\forall x \Diamond C(x)$;
- $\forall x \forall y (V(x, y) \rightarrow \Box V(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond V(x, y) \rightarrow V(x, y))$;
- $\forall x \forall y (H(x, y) \rightarrow \Box H(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond H(x, y) \rightarrow H(x, y))$.

Перепишем первую формулу:

$$\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x' (C(x') \wedge H(y, x')) \rightarrow \forall y' (H(x, y') \rightarrow \forall \underline{x}' (C(\underline{x}') \rightarrow V(y', \underline{x}')) \right).$$

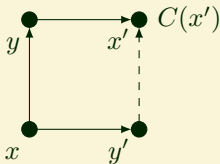


Моделируем равенство композиций $V \circ H$ и $H \circ V$:

- $\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x (C(x) \wedge H(y, x)) \rightarrow \forall y (H(x, y) \rightarrow \forall x (C(x) \rightarrow V(y, x))) \right)$;
- $\forall x \Diamond C(x)$;
- $\forall x \forall y (V(x, y) \rightarrow \Box V(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond V(x, y) \rightarrow V(x, y))$;
- $\forall x \forall y (H(x, y) \rightarrow \Box H(x, y)) \wedge \forall x \forall y (\Diamond H(x, y) \rightarrow H(x, y))$.

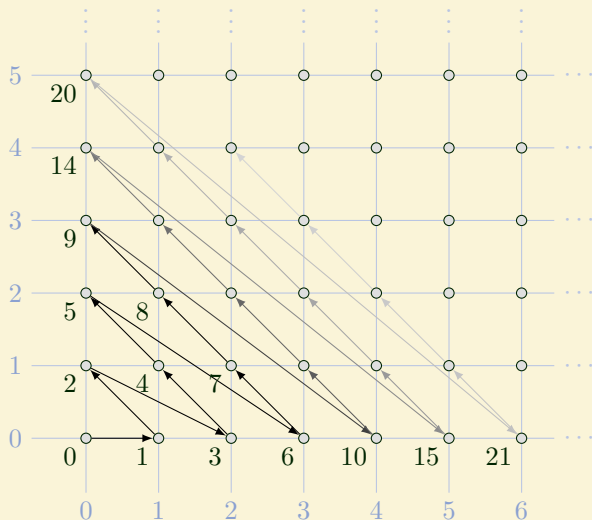
Перепишем первую формулу:

$$\Box \forall x \forall y \left(V(x, y) \wedge \exists x' (C(x') \wedge H(y, x')) \rightarrow \forall y' (H(x, y') \rightarrow \forall \underline{x}' (C(\underline{x}') \rightarrow V(y', \underline{x}')) \right).$$

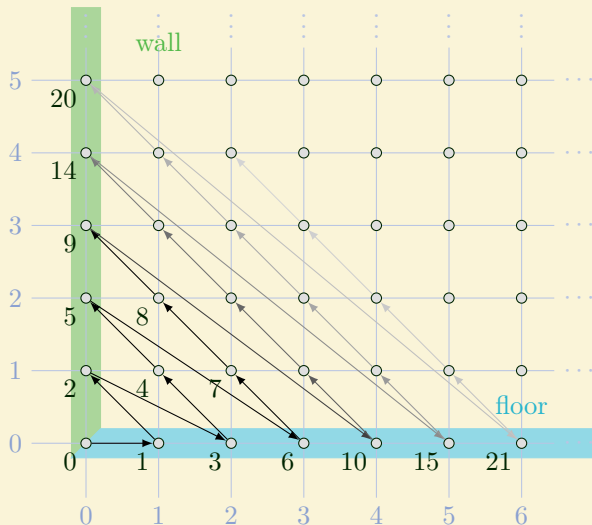


Аналогично в **QInt**, **QKC**, **QS4.3**,
но не в **QLC**

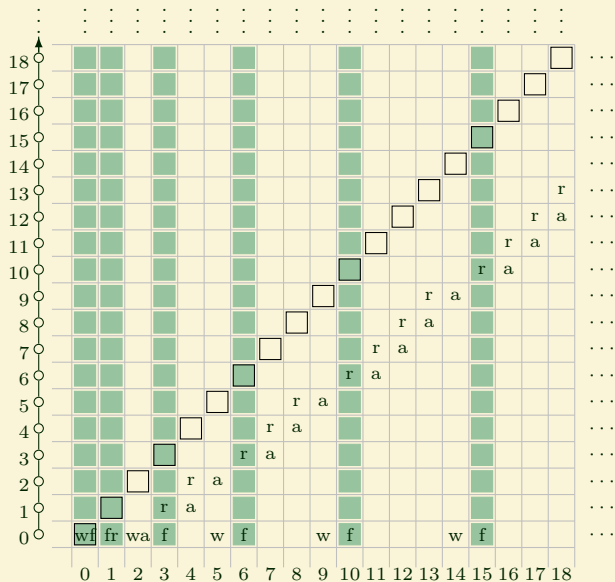
Нумерация Г. Кантора (M. Marx & M. Reynolds)



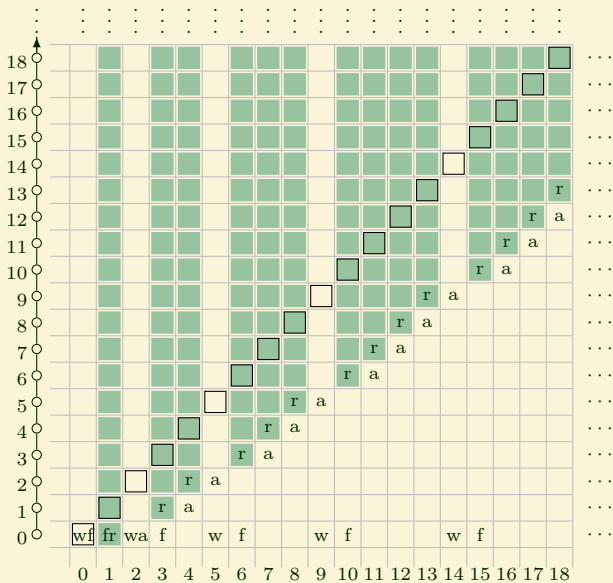
Нумерация Г. Кантора (M. Marx & M. Reynolds)



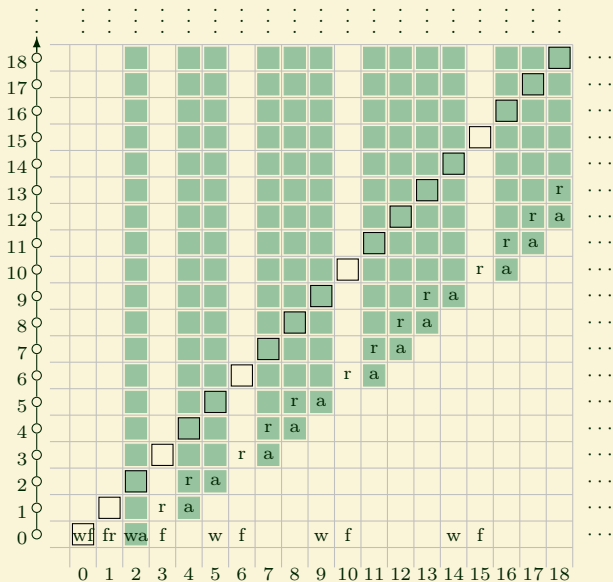
Полезная картинка: *floor*



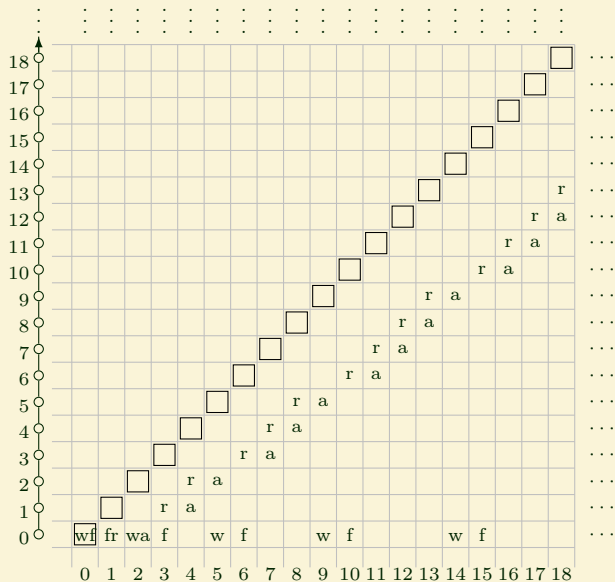
Полезная картинка: *right*



Полезная картинка: *above*



Полезная картинка



Техническая идея: «двойные метки»

Идея: для того, чтобы *выделить* элемент в предметной области мира модели, используем две унарные буквы, скажем, Q и Q' .
Чтобы выделить элемент x , опровергаем $Q(x) \rightarrow Q'(x)$.

Идея: для того, чтобы *выделить* элемент в предметной области мира модели, используем две унарные буквы, скажем, Q и Q' .

Чтобы выделить элемент x , опровергаем $Q(x) \rightarrow Q'(x)$.

Чтобы выделить элементы x и y , опровергаем $Q(x) \wedge S(y) \rightarrow Q'(x) \vee S'(y)$.

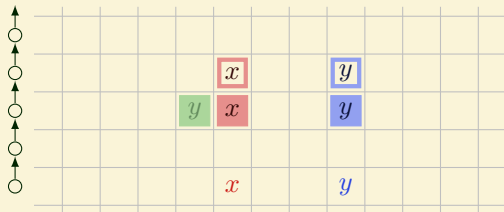
Идея: для того, чтобы *выделить* элемент в предметной области мира модели, используем две унарные буквы, скажем, Q и Q' .

Чтобы выделить элемент x , опровергаем $Q(x) \rightarrow Q'(x)$.

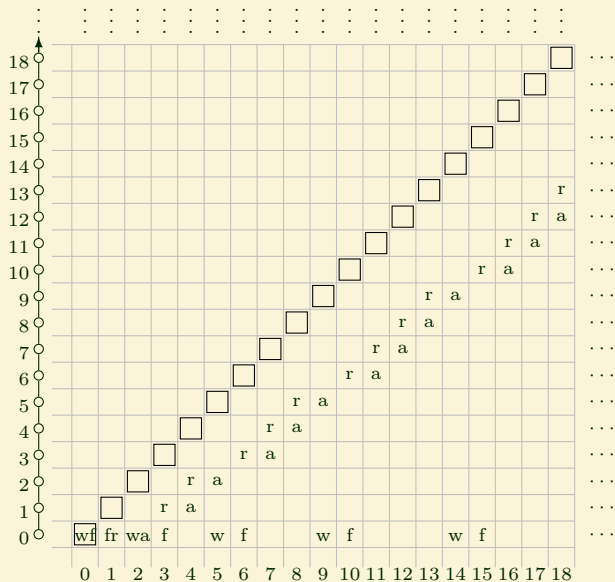
Чтобы выделить элементы x и y , опровергаем $Q(x) \wedge S(y) \rightarrow Q'(x) \vee S'(y)$.

Чтобы задествовать больше элементов, используем бинарное отношение и кванторы:

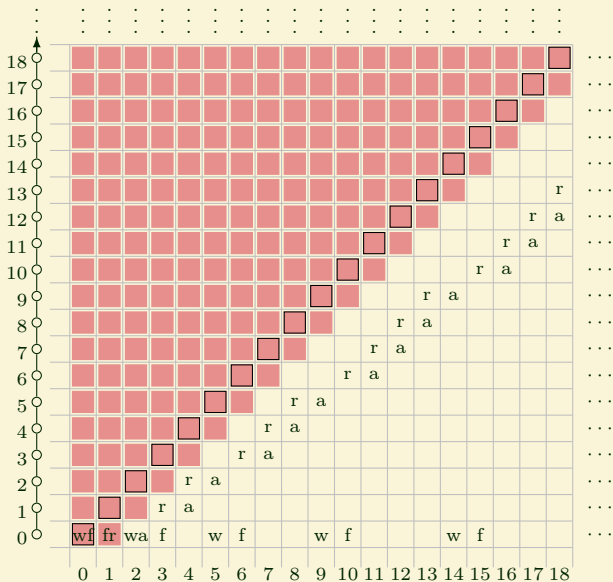
$$\left(\varphi(x, y) \rightarrow \psi(x, y) \right) \rightarrow \\ \rightarrow \left(\exists y (y \triangleleft x \wedge P(y)) \wedge Q(x) \wedge S(y) \rightarrow Q'(x) \vee S'(y) \right).$$



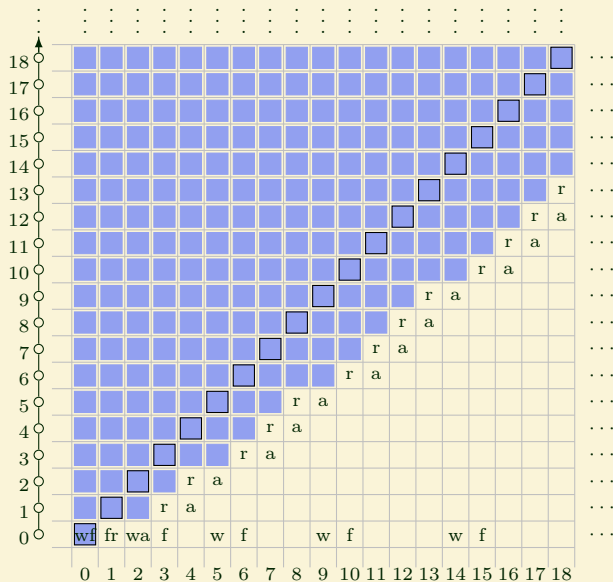
Полезная картинка



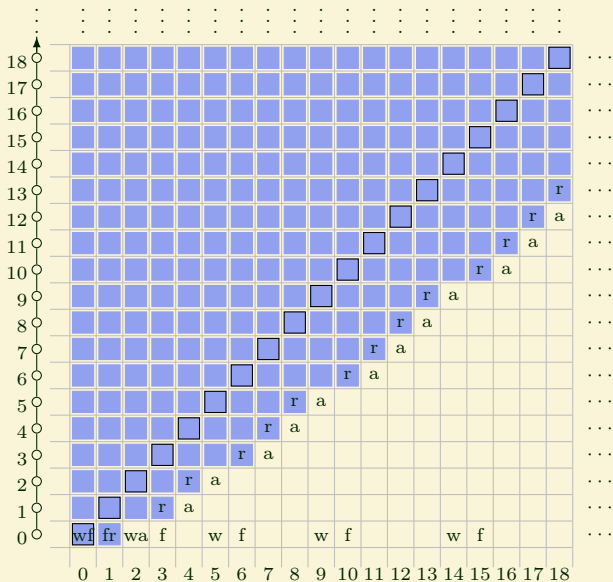
Полезная картинка: метка *next*



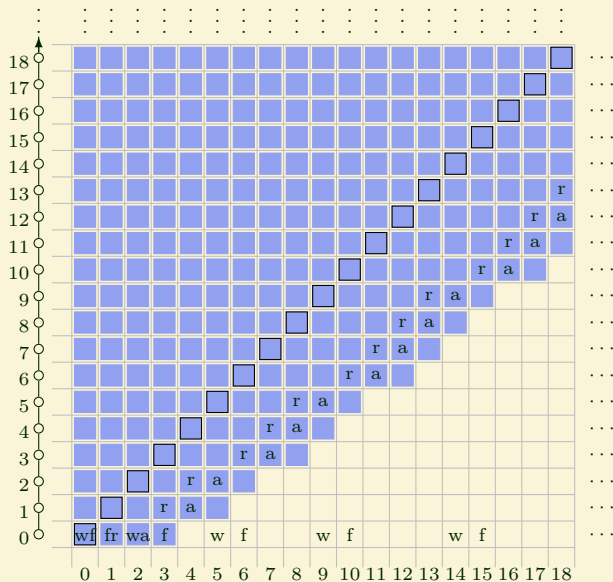
Полезная картинка: метка S''



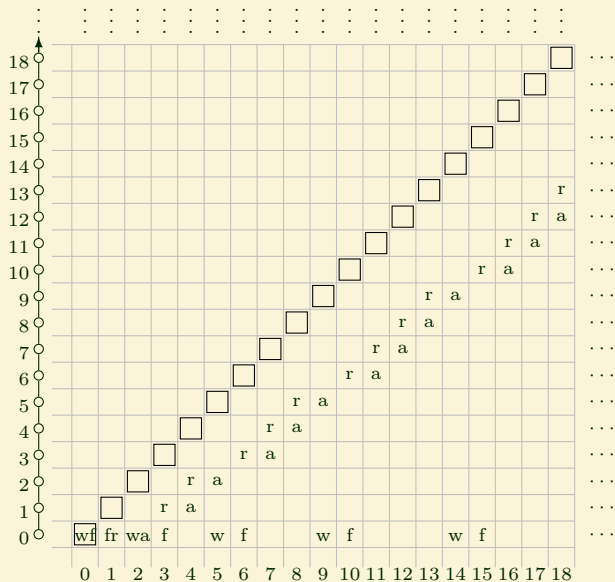
Полезная картинка: метка S'



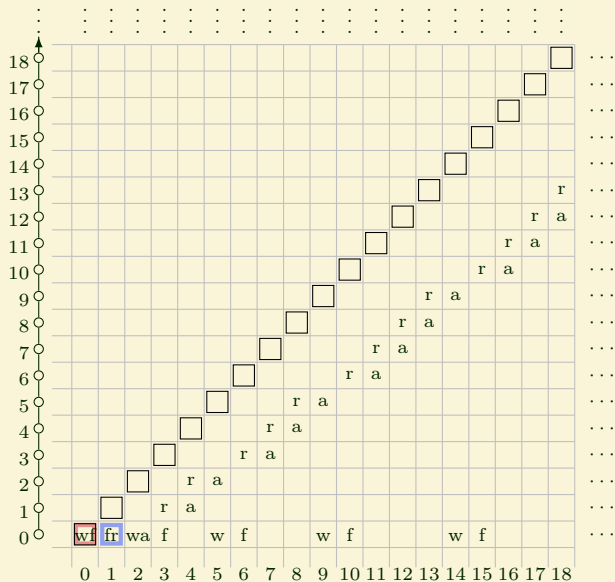
Полезная картинка: метка G



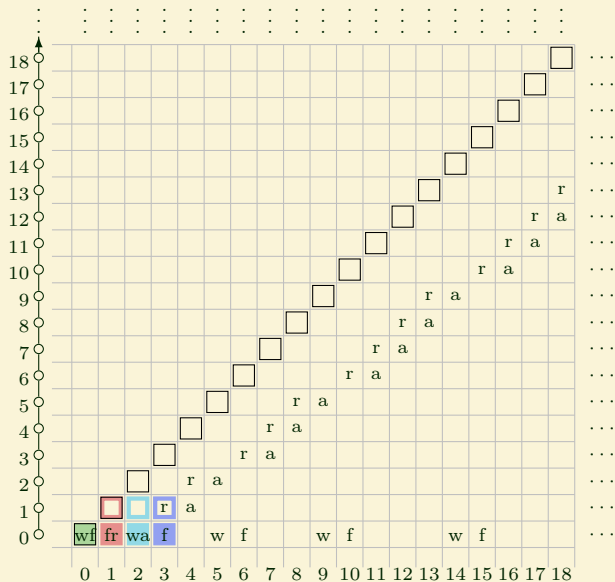
Полезная картинка



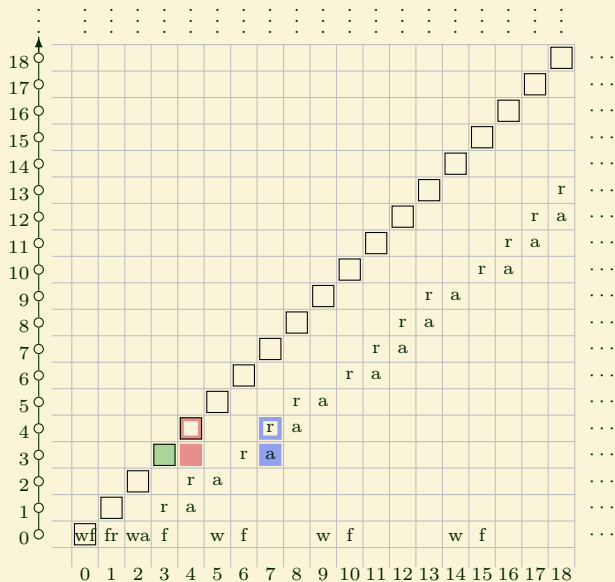
Полезная картинка



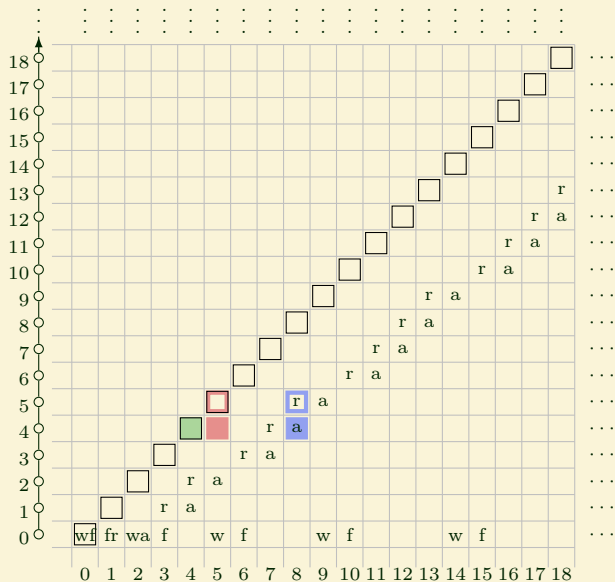
Полезная картинка



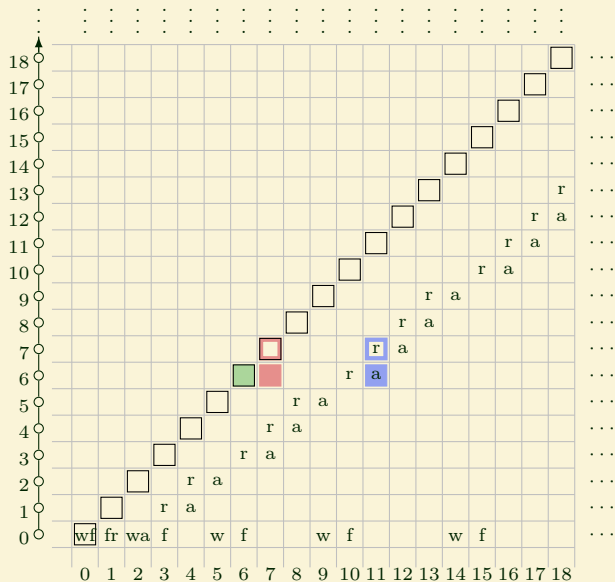
Полезная картинка



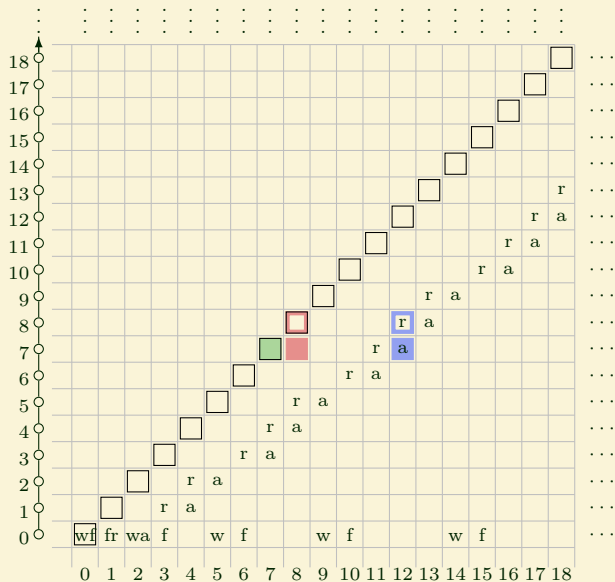
Полезная картинка



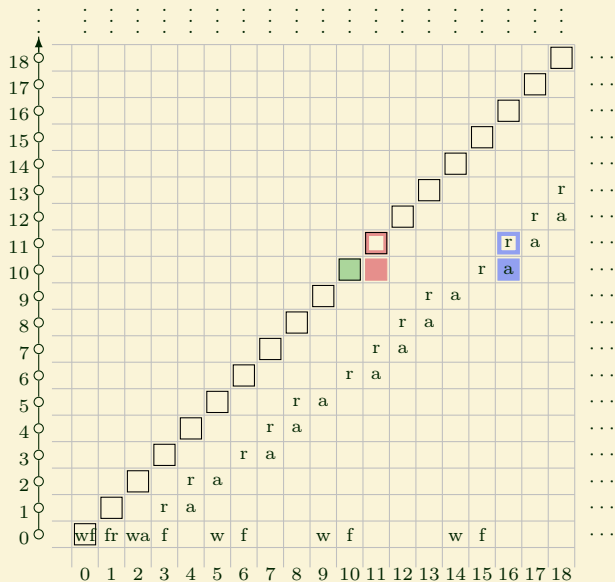
Полезная картинка



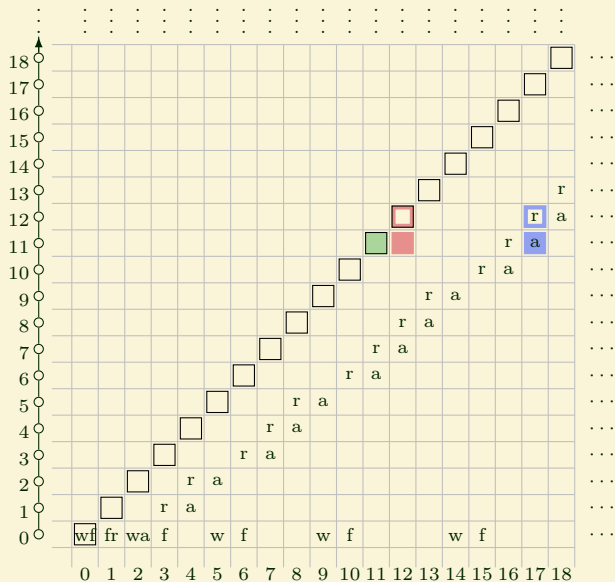
Полезная картинка



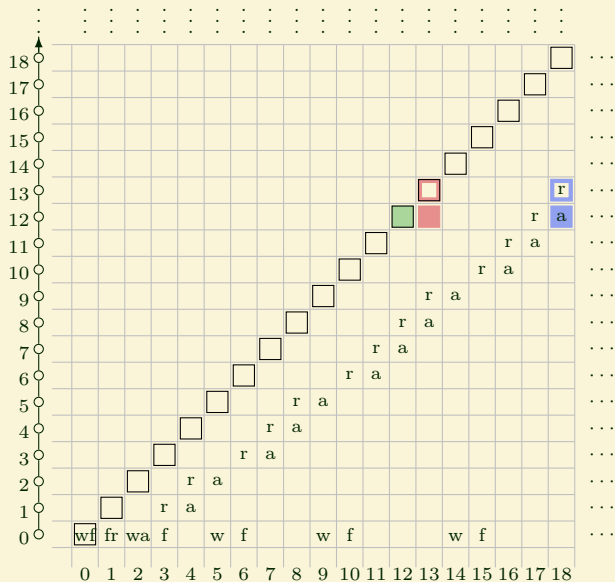
Полезная картинка



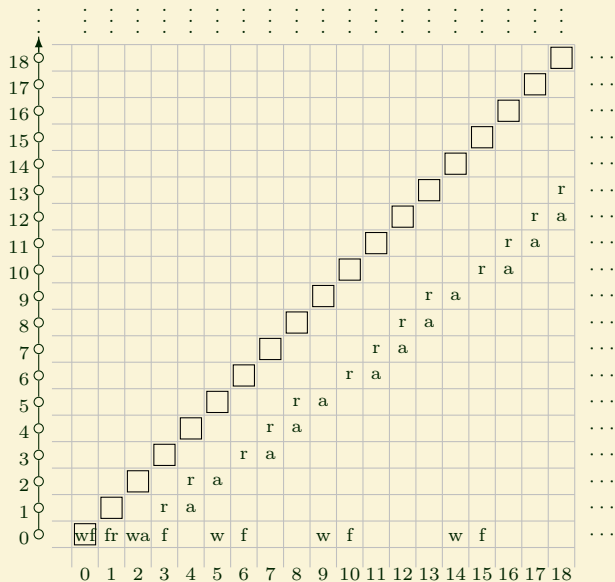
Полезная картинка



Полезная картинка



Полезная картинка



Двойные метки, формула DL

$$Serial_{\triangleleft} = \forall x \exists y (x \triangleleft y);$$

$$Diag_N = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow next(y)));$$

$$Diag_Q = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow (Q'(x) \leftrightarrow Q(y)));$$

$$Diag_S = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow (S'(x) \leftrightarrow S(y)) \wedge (S''(x) \leftrightarrow S'(y)));$$

$$Diag_G = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow (S(x) \leftrightarrow G(y)));$$

$$Agree_S = \forall x \forall y ((Q(x) \wedge S(y) \rightarrow Q'(x) \vee S'(y)) \vee \\ \vee (Q(x) \wedge S'(y) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y)));$$

$$Agree_G = \forall x \forall y ((Q(x) \wedge G(y) \rightarrow Q'(x) \vee S(y)) \vee \\ \vee (Q(x) \wedge S'(y) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y)));$$

$$Agree_{\triangleleft} = \forall x \forall y (y \triangleleft x \wedge S(x) \rightarrow S(y)).$$

$$| Q'(k-1) | Q(k) | next(k+1) | \dots | S''(m-2) | S'(m-1) | S(m) | G(m+1) |$$

Встраивание сетки, формула *FRAW*

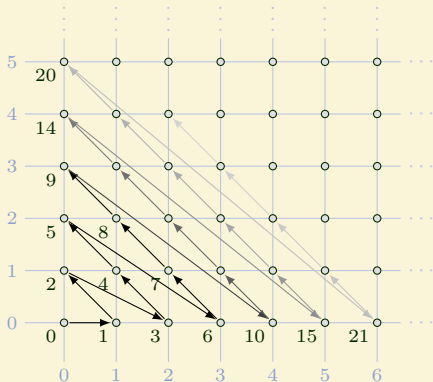
$$EM_W = \forall x (wall(x) \vee \neg wall(x));$$

$$Conn_1 = \forall x ((floor(x) \rightarrow \neg above(x)) \wedge (wall(x) \rightarrow \neg right(x)));$$

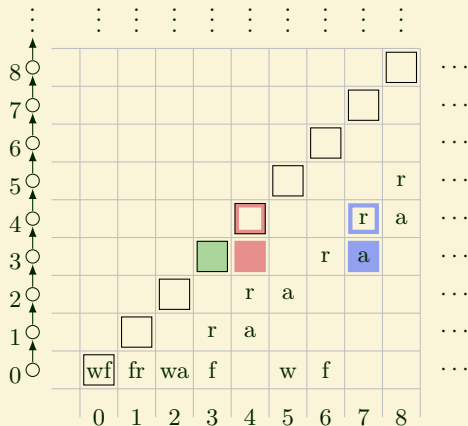
$$Conn_2 = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow (right(x) \rightarrow above(y)) \wedge (wall(x) \rightarrow floor(y)));$$

$$Conn_3 = \forall x ((above(x) \rightarrow S(x)) \wedge (right(x) \rightarrow S'(x)));$$

$$Start_{\triangleleft} = \forall x \forall y (x \triangleleft y \wedge wall(x) \wedge floor(x) \rightarrow right(y)).$$

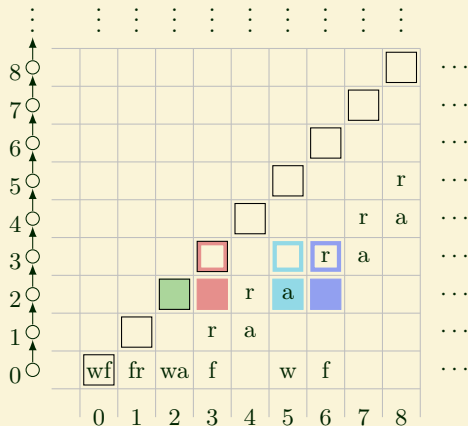


Формула $Move_1$



$$\begin{aligned}
 Move_1 = & \forall x \forall y \left((\neg wall(y) \wedge right(y) \wedge Q(x) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y)) \rightarrow \right. \\
 & \left. \rightarrow (\exists y (y \triangleleft x \wedge \neg wall(y)) \wedge next(x) \wedge above(y) \rightarrow Q(x) \vee S'(y)) \right).
 \end{aligned}$$

Формула $Move_2$



$Move_2 =$

$$= \forall x \forall y \left((\forall x (x \triangleleft y \rightarrow wall(x)) \wedge \neg wall(y) \wedge right(y) \wedge Q(x) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y)) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow (\exists y (y \triangleleft x \wedge \underline{wall(y)}) \wedge next(x) \wedge \exists x (x \triangleleft y \wedge above(x)) \wedge G(y) \rightarrow Q(x) \vee S(y)) \right).$$

Пусть $Grid$ — конъюнкция всех предыдущих формул.

Пусть также

$$T_0 = \forall x \bigvee_{i=0}^n \left(P_i(x) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg P_j(x) \right);$$

$$T_1 = \forall x \forall y \bigwedge_{i=0}^n \left(\bigvee \{ P_j(y) : \boxtimes t_i \neq \boxtimes t_j \} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow (right(y) \wedge Q(x) \wedge P_i(x) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y)) \right);$$

$$T_2 = \forall x \forall y \bigwedge_{i=0}^n \left(\bigvee \{ P_j(y) : \boxtimes t_i \neq \boxtimes t_j \} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow (above(y) \wedge Q(x) \wedge P_i(x) \rightarrow Q'(x) \vee S'(y)) \right);$$

$$Tiling_T = T_0 \wedge T_1 \wedge T_2.$$

Теперь положим

$$\text{Refute} = \forall x \forall y (x \triangleleft y \wedge \text{wall}(x) \wedge \text{floor}(x) \wedge Q(x) \rightarrow Q'(x) \vee S''(y));$$

$$\varphi_T = \text{Grid} \wedge \text{Tiling}_T \rightarrow \text{Refute}.$$

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T \notin \text{QLC}$.

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

*Логика **QLC** неразрешима (Σ_1^0 -полна) в языке с двумя предметными переменными.*

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

*Логика **QLC** неразрешима (Σ_1^0 -полна) в языке с двумя предметными переменными.*

Теорема

Пусть $\mathbf{QLC} \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L неразрешима (Σ_1^0 -трудна) в языке с двумя предметными переменными.

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

*Логика **QLC** неразрешима (Σ_1^0 -полна) в языке с двумя предметными переменными.*

Теорема

Пусть $\mathbf{QLC} \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L неразрешима (Σ_1^0 -трудна) в языке с двумя предметными переменными.

Следствие

Следующие логики неразрешимы в языке с двумя предметными переменными: $\mathbf{QLC.cd}$, $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle)$, $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{R}, \leq \rangle)$, а также $\mathbf{QSIL}(\langle \alpha, \subseteq \rangle)$, где α — бесконечный ординал.

Позитивный фрагмент

В формуле φ_T можно элиминировать \perp .

Например, можно заменить \perp на $\forall x Q'(x)$.

Пусть $\varphi_T^+ = [\forall x Q'(x) / \perp] \varphi_T$.

В формуле φ_T можно элиминировать \perp .

Например, можно заменить \perp на $\forall x Q'(x)$.

Пусть $\varphi_T^+ = [\forall x Q'(x) / \perp] \varphi_T$.

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T^+ \notin \mathbf{QLC}$.

В формуле φ_T можно элиминировать \perp .
Например, можно заменить \perp на $\forall x Q'(x)$.
Пусть $\varphi_T^+ = [\forall x Q'(x) / \perp] \varphi_T$.

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T^+ \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

Логика \mathbf{QLC}^+ неразрешима (Σ_1^0 -полна) в языке с двумя предметными переменными.

В формуле φ_T можно элиминировать \perp .
Например, можно заменить \perp на $\forall x Q'(x)$.
Пусть $\varphi_T^+ = [\forall x Q'(x) / \perp] \varphi_T$.

Лемма

Существует T -укладка $\iff \varphi_T^+ \notin \mathbf{QLC}$.

Теорема

Логика \mathbf{QLC}^+ неразрешима (Σ_1^0 -полна) в языке с двумя предметными переменными.

Теорема

Пусть $\mathbf{QLC} \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L^+ неразрешима (Σ_1^0 -трудна) в языке с двумя предметными переменными.

Проблема домино:

по набору $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ типов плиток домино выяснить, существует ли такая T -укладка $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$(1) \quad \boxtimes f(i, j) = \boxtimes f(i + 1, j);$$

$$(2) \quad \boxminus f(i, j) = \boxminus f(i, j + 1),$$

а также

$$(3) \quad f(0, 0) = t_0$$

и существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$(4) \quad f(0, k_0 + j) = t_1.$$

Нетрудно показать, что эта проблема Σ_1^0 -трудна.

Пусть

$$x \preceq y = Q(y) \rightarrow Q(x);$$

$$Agree_{\preceq} = \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow x \preceq y);$$

$$T_3 = \forall x (wall(x) \wedge floor(x) \rightarrow P_0(x));$$

$$T_4 = \exists x \forall y (x \preceq y \wedge wall(y) \rightarrow P_1(y));$$

$$Refute_Q = \exists x (Q(x) \rightarrow Q'(x));$$

$$Grid' = Grid \wedge Agree_{\preceq};$$

$$Tiling'_T = Tiling_T \wedge T_3 \wedge T_4;$$

$$Refute' = Refute \vee Refute_Q;$$

$$\psi_T = Grid' \wedge Tiling'_T \rightarrow Refute'.$$

Пусть

$$\begin{aligned}x \preceq y &= Q(y) \rightarrow Q(x); \\ \text{Agree}_{\preceq} &= \forall x \forall y (x \triangleleft y \rightarrow x \preceq y); \\ T_3 &= \forall x (wall(x) \wedge floor(x) \rightarrow P_0(x)); \\ T_4 &= \exists x \forall y (x \preceq y \wedge wall(y) \rightarrow P_1(y)); \\ \text{Refute}_Q &= \exists x (Q(x) \rightarrow Q'(x)); \\ \text{Grid}' &= \text{Grid} \wedge \text{Agree}_{\preceq}; \\ \text{Tiling}'_T &= \text{Tiling}_T \wedge T_3 \wedge T_4; \\ \text{Refute}' &= \text{Refute} \vee \text{Refute}_Q; \\ \psi_T &= \text{Grid}' \wedge \text{Tiling}'_T \rightarrow \text{Refute}'.\end{aligned}$$

Теорема

Пусть $\mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle) \subseteq L \subseteq \mathbf{QSIL}(\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \odot \mathbb{N})$. Тогда L^+ одновременно Σ_1^0 -трудна и Π_1^0 -трудна в языке с двумя предметными переменными.

Спасибо за внимание!